Munich.
00-1901,
42.

KIPP-ERSCHEINUNGEN.

EIN FALL
VON INSTABILEM ELASTISCHEM GLEICHGEWICHT.

BIBLIOTHÈQUE DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

INAUGURAL-DISSERTATION
DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT, SEKTION II
DER LUDWIGS-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT
ZU MÜNCHEN.

EINGEREICHT AM 14. NOVEMBER 1899

VON

LUDWIG PRANDTL,
GEPRÜFTER MASCHINEN-INGENIEUR.

NÜRNBERG.
BUCHDRUCKEREI ROBERT STICH.

Vorwort.

Die erste Anregung zu dieser Arbeit stammt aus der maschinentechnischen Konstruktionspraxis. Bei der Berechnung eines auf Biegung beanspruchten Stabes, der aus konstruktiven Gründen als Flacheisen ausgeführt werden sollte, kamen mir Bedenken, ob nicht etwa der Stab unter den biegenden Kräften seitlich ausweichen könnte, wie dergleichen bei schmalen und hohen Stäben (z. B. Reißschienen) eine bekannte Erscheinung ist. Mein Suchen nach einer Theorie dieser Erscheinung in verschiedenen einschlägigen Büchern blieb erfolglos; so kam mir der Gedanke, die Sache selbst zu versuchen; bald — Mitte Oktober 1896 — lag mir auch die Theorie der Ausknickung eines Kragträgers in ihrer einfachsten Form vor. Das beginnende Semester liess jedoch die Arbeit bald in den Hintergrund treten, und erst im Februar 1899, als ich Assistent am mechanisch-technischen Laboratorium der Münchener technischen Hochschule war, nahm ich die Sache wieder auf. Inzwischen hatte ich mich auch verschiedentlich vergewissert, dass eine Theorie der Erscheinung noch nicht vorhanden ist.

Mit der Vertiefung in die Arbeit stellten sich immer neue Fragen ein, welche sich an das elastische Verhalten von solchen Stäben knüpfen, deren Querschnitte eine gegenüber den andern sehr kleine Dimension besitzen. So entstand neben dem hier veröffentlichten Teil ein anderer, der von der veränderlichen Biegungssteifigkeit solcher Stäbe (schmaler Flachstab, dünnwandiges Rohr und Winkeleisen) handelt und im Anschluss daran ihr abweichendes Verhalten bei der Knickung kennzeichnet. Dieser Teil ist, soweit er aus Rechnungen besteht, ebenfalls fertiggestellt. Ein vielleicht noch hinzukommender dritter Teil soll der Torsion von solchen Stäben gewidmet sein.

Dem Leser mag in den folgenden Abhandlungen vielleicht manches etwas weitschweifig und breit erscheinen. Das bitte ich dann damit entschuldigen zu wollen, dass zweien Gruppen von Lesern bei der Abfassung Rechnung getragen werden musste, einmal den Physikern und Mathematikern, andrerseits den Technikern. Es ist ersichtlich, dass häufig etwas, was der einen Gruppe selbstverständlich erscheint, der anderen im Interesse des vollständigen Verständnisses gesagt werden muss. Auch bin ich der Ansicht, dass es besser ist, etwa zu erwartenden Einwendungen von vornherein den Weg abzuschneiden, als sie erst herankommen zu lassen.

Zum Schluss gereicht es mir zur grossen Freude, meinem hochverehrten Lehrer und damaligen Chef, Herrn Prof. A. Föppl, an dieser Stelle meinen ergebensten Dank auszusprechen für die gütige Erlaubnis, die Einrichtung des mechanisch-technischen Laboratoriums für meine Versuche benützen zu dürfen. Dem Personal des Laboratoriums, das mich mehrfach bei den Versuchen unterstützte, sei auch an dieser Stelle mein herzlichster Dank ausgesprochen.

München, den 14. November 1899.

Ludwig Prandtl.

Inhalts-Verzeichnis.

Einleitung 7

I. Abschnitt: **Allgemeine Theorie der Kipperscheinungen.**

A. Aufstellung und allgemeine Lösung des Problems . . 9

B. Berechnung von Tafeln für die erhaltenen Funktionen . 20

C. Berechnung von bestimmten Belastungsfällen . . . 29

I. Belastung nur am Ende des Stabes 31

II. Der Stab mit einer Last in der Mitte . . . 39

III. Allgemeiner Fall des Stabes mit mehreren Zweigen . 42

II. Abschnitt: **Spezielle Verbesserungen und Erweiterungen der Theorie.**

A. Einfluss des Eigengewichts 45

B. Einfluss der Hauptbiegung 51

Formeln für den Rechteckquerschnitt 57

C. Zusammenhang der Kipperscheinungen mit der gewöhnlichen Knickung 60

III. Abschnitt: **Versuche** 65

Einleitung.

Die erste theoretische Behandlung eines Falls von instabilem elastischem Gleichgewicht stammt von Euler. In einer Abhandlung „De curvis elasticis“ *) gibt er mittels der noch heute nach ihm benannten Formel die Last an, bei der ein auf Druck beanspruchter gerader Stab eine Ausbiegung erfährt. Später brachte er noch eine Theorie der Knickung durch Eigengewicht **). Was Euler hinterliess, wurde später von den wissenschaftlichen Vertretern der eben aufkeimenden Technik begierig wieder aufgegriffen, als es sich darum handelte, Methoden für die Festigkeitsberechnung der Konstruktionen ausfindig zu machen. Aber nur zu bald zeigte sich die „Unbrauchbarkeit“ der Theorie. Auch Versuche, die lange vor der kritischen Last schon zu bedeutenden Ausbiegungen und zum Bruche führten, sprachen gegen die Theorie. Man wusste eben noch nicht genügend zu unterscheiden zwischen dem rein elastischen Erscheinungen der Eulerschen Theorie und den Bruchvorgängen, die beim Versuch dazutraten, man übersah, dass die zu den Versuchen verwendeten Stäbe nie vollkommen gerade sein können, während die Eulersche Theorie vollkommene Geradheit voraussetzte. — Durch die Arbeiten Schefflers ***), der den Einfluss der Stabenden, die Exzentrizität des Kraftangriffes, die auftretenden Biegungsspannungen u. a. berechnete, sowie auch durch die Arbeiten verschiedener anderer wurde der Sachverhalt wesentlich geklärt. Heute ist man sich, besonders nach den Versuchen von Bauschinger (München) und v. Tetmajer (Zürich)

*) Ein Kapitel aus Euler, Methodus inveniendi lineas curvas. Lausanne 1744.

**) Enthalten in „Nouveau commentaire de l'Académie de St. Pétersbourg“.

***) H. Scheffler, Theorie der Festigkeit gegen Zerknicken. Braunschweig 1858.

vollständig darüber klar, dass die Eulersche Theorie in der besten Übereinstimmung mit der Praxis ist, wenn nur die Grenzbedingungen den Verhältnissen entsprechend gewählt werden. Die Eulersche Formel gibt dabei immer die obere Grenze für die Druckfestigkeit eines Stabes an, bei der er unfehlbar deformiert wird, wenn er nicht schon vorher durch andere Ursachen zerstört wurde.

Der Eulerschen Theorie haben sich in neuerer Zeit noch verschiedene Fälle von instabilem elastischem Gleichgewicht zugesellt, die u. a. in Love's Elasticity*), 2. Band, Seite 289 u. f. sehr vollständig zusammengestellt sind.

Das vorliegende Problem handelt von den eigentümlichen Erscheinungen, die bei Stäben auftreten, deren Querschnitt zwei sehr verschiedene Hauptträgheitsmomente aufweist, wenn diese Stäbe in der Richtung der grösseren Steifigkeit stärkeren biegenden Kräften unterworfen sind. Um mich in der Folge kürzer ausdrücken zu können, werde ich im Gegensatz zu den durch Druck erzeugten Knickerscheinungen diese durch Biegung hervorgerufene Erscheinung mit dem Namen Kippen belegen; dieses Wort habe ich gewählt, um auszudrücken, dass hier mit dem seitlichen Ausweichen des Stabes immer eine Verdrehung desselben, ein Umschlagen oder Umkippen verbunden ist.

Im folgenden soll erst die allgemeine Theorie der Erscheinung erbracht werden, dann die Berechnung für verschiedene einzelne Fälle durchgeführt werden. Nach einigen nun folgenden Erweiterungen der Theorie sollen schliesslich die Versuche beschrieben werden, die zum Beweis der Richtigkeit der Rechnungen unternommen wurden.

*) A. E. H. Love, A treatise on the mathematical theory of elasticity. Cambridge 1892. (2 Bände.)

I. Abschnitt.

Allgemeine Theorie der Kipperscheinungen.

A. Aufstellung und allgemeine Lösung des Problems.

Das Wesen der Erscheinungen, deren Theorie in dieser Abhandlung erbracht werden soll, wird am besten durch ein Beispiel veranschaulicht. Ein gerader Stab mit etwa rechteckigem Querschnitt, dessen Höhe bedeutend grösser ist als die Breite, wird in der Richtung seiner grössten Steifigkeit auf Biegung beansprucht, etwa so, wie in der Abbildung 1) angegeben ist. Fallen die Richtungen von Kraft und grosser Hauptachse des Querschnitts nicht ganz zusammen, so wird bei der Belastung neben der senkrechten Durchbiegung auch eine wagrechte entstehen, wie die Theorie der Biegung mit schiefer Belastung (Föppl, Festigkeitslehre*) Seite 144) lehrt. Denkt man sich aber einen derartigen Aufstellungsfehler dadurch beseitigt, dass man die Einspannvorrichtung solange um eine horizontale Achse dreht, bis mässige aufgebrachte Lasten einen erkennbaren seitlichen Ausschlag nicht mehr ergeben, so könnte man zu der Vermutung kommen, dass man jetzt die Last beliebig steigern könne, ohne wieder eine seitliche Ausbiegung zu erhalten, wenn man nur unter der durch die Festigkeit des Stabes gezogenen Grenze bleibt. Der Versuch zeigt indess, dass diese Vermutung irrig ist. Mag der Stab noch so sorgfältig gerade gerichtet sein und noch so genau eingestellt werden, immer kommt man bei

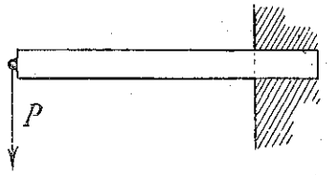


Abb. 1.

*) Dr. August Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik, III. Band, Festigkeitslehre. Leipzig, Teubner 1897.

allmähliger Steigerung der Last an eine Grenze, bei der stärkere seitliche Verbiegungen auftreten.

Um einen besseren Einblick in das thatsächliche Verhalten zu gewinnen, kann man die Kraft beobachten (etwa mit einer Federwage), die nötig ist, um das Stabende in der Richtung der geringeren Steifigkeit um eine gewisse gleichbleibende kleine Strecke zur Seite zu ziehen. Steigert man nun die Belastung von Null an immer mehr, so zeigt die Federwage eine stetige Abnahme der seitlichen Kraft. Nähert man sich nun der „kritischen Last", so nähert sich in gleichem Maße die Kraft, welche zur Hervorbringung der seitlichen Ausbiegung nötig ist, dem Werte Null. Verhindert man, etwa durch eine Führung, die seitliche Bewegung des Stabendes, so kann man über die kritische Last hinausgehen und findet jetzt, dass nun eine Kraft aufgewendet werden muss, um den Stab in die gestreckte Lage zurückzuführen. In der gestreckten Lage ist übrigens nach wie vor die seitliche Kraft gleich Null. Man kann also sagen: Die gestreckte Lage ist jederzeit eine Gleichgewichtslage; sie ist zu Anfang stabil, wird bei der kritischen Last indifferent und bei Überschreiten derselben labil.

Diese Verhältnisse zeigen sich auch recht anschaulich, wenn man die Schwingungen des Stabes betrachtet. Zuerst ziemlich schnell, werden sie naturgemäss mit der Vermehrung der Last immer langsamer; in der Nähe der kritischen Last aber nimmt plötzlich die Schwingungsdauer ganz erheblich zu; sie steigt bei einer Lastvermehrung von wenigen Prozenten von ein paar Sekunden auf halbe bis ganze Minuten. Mit dem Erreichen der kritischen Last hört die Bewegung auf, eine Schwingung zu sein, der Stab entfernt sich immer weiter von der Anfangslage, ohne in sie zurückzukehren. Über der kritischen Last endlich zeigt der zeitliche Verlauf der Bewegung deutlich den exponentialen Charakter, der der Bewegung um labile Gleichgewichtslagen entspricht.

Über die Belastung unter Zuhilfenahme der erwähnten Führung möchte ich vorerst nur erwähnen, dass, noch bevor man das Doppelte der ersteren Last erreicht, eine zweite kritische Belastung auftritt, bei der nun die Stabmitte auszuweichen beginnt, und zwar unter ganz ähnlichen Begleitumständen, wie oben beim ersten Fall. Das weitere über diese Verhältnisse wird geeigneter Weise auf einen späteren Abschnitt verschoben.

Die Gestalt des Stabes nach der Auslenkung zeigt die Abb. 2), die als Grundriss von Abb. 1) aufzufassen ist. Wie ersichtlich, hat der Stab neben der Ausbiegung auch eine Verdrehung erfahren. Diese Verdrehung wird aufrecht erhalten durch das Torsionsmoment, welches die Kraft P infolge der seitlichen Auslenkung — besonders in den nahe am festen Ende befindlichen Querschnitten — hervorbringt. Die dadurch bewirkte Schiefstellung der weiter von diesem Ende abliegenden Querschnitte gibt ihrerseits hinwiederum Veranlassung zu der seitlichen Ausbiegung. Wie man hieraus erkennt, beruht das Zustandekommen der Erscheinung auf einer Wechselwirkung von verdrehenden und biegenden Momenten.

Abb. 2.

Setzt man den Stab, was hier immer geschehen soll, als vollkommen elastisch voraus, so sind die Momente der Biegungs- und Drehungsspannungen als proportional mit den ihnen entsprechenden Deformationen anzusehen, also auch proportional den Auslenkungen des Stabendes. Die Momente der äusseren Kraft sind ebenfalls proportional diesen Auslenkungen, denn sie sind ja Produkte der Kraft mit Hebelarmen, die zur Auslenkung des Endes in einem festen Verhältnis stehen. Es kommt nun ganz auf das Verhältnis der beiden Proportionalitätsfaktoren an, ob das Gleichgewicht stabil oder labil ausfällt. Ist der der äusseren Kraft der kleinere, so überwiegt nach einer durch äussere Ursachen hervorgerufenen Ausbiegung das Moment der inneren Kräfte über das der äusseren, der Stab kehrt also in die Gleichgewichtslage zurück. Werden aber durch Steigerung der äusseren Kraft beide Proportionalitätsfaktoren einander gleich, so kann eine beginnende Ausbiegung sich immer mehr vergrössern, da die äusseren Momente mit den inneren gleichen Schritt halten. Erst wenn bei grösseren Ausbiegungen die Proportionalität aufhört und die äusseren Momente hinter den inneren zurückzubleiben beginnen, gelangt der Stab in eine neue Gleichgewichtslage, vorausgesetzt natürlich, dass er nicht vorher schon zum Bruche gelangt ist.

Mag in qualitativer Hinsicht die bisherige Betrachtung genügenden Aufschluss geben, quantitative Angaben können nur aus einer mathematischen Behandlung der Frage gewonnen werden.

In diese sei daher jetzt eingetreten.

Zunächst sollen die bereits vorhandenen Grundlagen für die Entwicklung der Theorie aufgeführt werden. Da sind es vor allem zwei Beziehungen, welche den Zusammenhang zwischen den biegenden und verdrehenden Momenten und den von ihnen verursachten Formänderungen beschreiben:

$$M_B = \frac{B}{\varrho} \tag{1}$$

und

$$M_T = C\frac{d\varphi}{dx} \tag{2}$$

Gleichung (1) sagt aus, dass der Krümmungsradius des (ursprünglich geraden) Stabes dem biegenden Momente umgekehrt proportional ist; der Proportionalitätsfaktor B heisst die „Biegungssteifigkeit“ *). Die zweite Gleichung besagt, dass die relative Verdrehung zweier benachbarter Querschnitte dem Torsionsmoment proportional ist. C ist dabei analog die Verdrehungssteifigkeit. Diese beiden Grundsätze können als einfache Erfahrungsthatsachen gelten. Ihre Richtigkeit ist für alle hier in Betracht kommenden Materialien durch den Versuch mit ausreichender Genauigkeit bestätigt.

Der dritte hier verwendete Satz bezieht sich auf die schiefe Belastung, d. h. auf den Fall, dass keine der beiden Querschnittshauptachsen **) in die Ebene des biegenden Moments fällt. Die Theorie lehrt, dass die Gesamtwirkung des biegenden Moments sich durch Überlagerung zusammensetzen lässt aus zwei Teilen, welche einzeln als Wirkungen der in den Achsrichtungen liegenden Komponenten des Moments aufgefasst werden können. Auch dieser Satz wird durch die Erfahrung hinreichend bestätigt.

Um nun die zunächst nötige Differentialgleichung des Problems aufzustellen, sei ausgegangen von dem schon besprochenen einfachsten Fall des Problems, von dem einseitig eingespannten, auf der andern Seite belasteten Stab. Das Koordinatensystem sei mit Rücksicht auf möglichst einfache Gestalt der Formeln folgendermassen festgelegt. Der Ursprung

*) Diese Art der Bezeichnung ist entnommen aus Love's »Elasticity«. Dieser nennt die Grösse »flexional rigidity«. Die deutschen Autoren trennen die Grösse gewöhnlich in zwei; es ist nämlich $B = E\,\mathfrak{J}$ (Elastizitätsmodus mal Trägheitsmoment des Querschnitts); wegen der einfacheren und daher übersichtlicheren Schreibweise habe ich die obige Bezeichnung vorgezogen.

**) Über die Querschnittshauptachsen s. Föppl, Festigkeitslehre, S. 100.

soll dauernd mit dem freien Ende des Stabes zusammenfallen, an dem die Kraft angreift; die Z-Achse werde in die Kraftrichtung selbst gelegt, die X-Achse parallel der ursprünglichen Richtung des Stabes und die Y-Achse senkrecht zu den beiden andern. Ausser diesen Koordinaten ist noch eine Grösse nötig, welche die Schiefstellung der einzelnen Querschnitte beschreibt. Dazu habe ich den Winkel φ gewählt, den die grosse Hauptachse eines Querschnitts mit der Kraftrichtung, also mit der Z-Achse bildet.

Man kann nun in voller Allgemeinheit die Differentialgleichung für beliebig grosse endliche Ausschläge des Stabes aufstellen. Ich habe es gethan; sie wird aber so verwickelt, dass man sie eben aufstellen, dann aber weiter mit ihr nichts mehr beginnen kann. Zum Glück für die weitere Behandlung des Falls treten aber die eingangs besprochenen Erscheinungen gerade in der nächsten Nähe der gestreckten Lage des Stabes auf, sodass es vollauf berechtigt erscheint, die Ausschläge von vornherein als klein gegenüber der Stablänge anzunehmen. Der Hauptvorteil, der dadurch erreicht ist, besteht darin, dass die Differentialgleichung, wenn die kleinen Grössen höherer Ordnung vernachlässigt werden können, nun in eine lineare übergeht. Um die Rechnung durchführbar zu machen, müssen noch ein paar Einschränkungen gemacht werden, die aber der Verwendbarkeit der Ergebnisse keinen nennenswerten Eintrag thun. Es soll nämlich der ursprünglich gerade Stab einen konstanten Querschnitt haben, und zwar einen Querschnitt, dessen Biegungssteifigkeit B_1 in Richtung der einen Querschnittshauptachse gross ist gegenüber der Steifigkeit in Richtung der anderen Hauptachse B_2. Ferner soll der Stab auch schlank genug sein, dass von dem Einfluss der Schubkraft auf die Durchbiegung abgesehen werden kann.

Legt man nun durch einen Querschnitt mit der Abscisse x ein Hilfskoordinatensystem $U\,V\,W$ so, das die U- und V-Richtungen mit den Hauptachsen des Querschnitts zusammenfallen, während die W-Achse senkrecht zu beiden durch den Querschnittsmittelpunkt geht (siehe Abb. 3), so kann das in diesem Querschnitt angreifende Biegungsmoment $P\cdot x$ nach den Hauptachsen in zwei Komponenten $P\cdot x\cos\varphi$ und $P\cdot x\sin\varphi$ zerlegt werden. Die Anwendung der Gleichung (1) ergibt nun

$$P\cdot x\cos\varphi = \frac{B_1}{\varrho_1} = B_1\cdot\frac{d^2u}{dx^2}$$

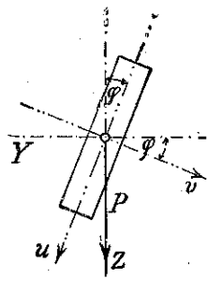


Abb. 3.

wie wegen der Kleinheit der Ausschläge auch geschrieben werden kann; ebenso ist:

$$P \cdot x \sin \varphi = \frac{B_2}{\varrho_2} = B_2 \cdot \frac{d^2 v}{dx^2}$$

ferner ist $$y = u \sin \varphi - v \cos \varphi$$

und $$z = u \cos \varphi + v \sin \varphi.$$

Die gleichen Beziehungen bestehen zwischen den Differentialquotienten dieser Grössen; es ist also, wenn man der Einfachheit halber y'' usw. statt $\frac{d^2 y}{dx^2}$ usw. schreibt,

$$y'' = u'' \sin \varphi - v'' \cos \varphi =$$
$$- Px \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{B_2} - \frac{1}{B_1}\right) = - \tfrac{1}{2} Px \sin 2 \varphi \frac{B_1 - B_2}{B_1 B_2} \qquad (3)$$

und $$z'' = u'' \cos \varphi + v'' \sin \varphi = Px \left(\frac{\sin^2 \varphi}{B_2} + \frac{\cos^2 \varphi}{B_1}\right).$$

Für die weitere Behandlung der Aufgabe ist von den beiden Gleichungen nur die erstere von Interesse; denn die Ausschläge nach der Y-Richtung sind es ja, auf welche es hier ankommt.

Bezüglich der W-Achse des Hilfskoordinatensystems, die zugleich Tangente an die elastische Linie ist, hat die Kraft P (s. Abb. 4) ein Moment $P \cdot p$, das verdrehend auf den Querschnitt einwirkt; die Anwendung von Gleichung (2) liefert hier:

$$C \frac{d\varphi}{dx} = - Pp.$$

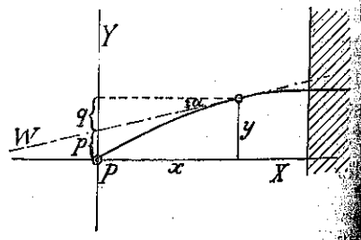


Abb. 4.

Das — Zeichen musste gesetzt werden, weil, wie aus Abb. 2 ersichtlich ist, φ mit der Entfernung vom Koordinatenursprung abnimmt. Die Grösse p lässt sich schreiben als Differenz zwischen der Ordinate y und der Grösse q; diese ist aber $= x \cdot \operatorname{tg} \alpha = x y'$. Hiemit erhält man die Gleichung:

$$C\varphi' = P (xy' - y). \qquad (4)$$

Um zu einer Lösung zu gelangen, muss von den beiden Unbekannten φ und y eine eliminiert werden; welche, ist im Prinzip gleichgiltig. Hier soll y eliminiert werden, weil dieser Weg der einfachere ist. Durch einmaliges Differenzieren der

Gleichung (4) erhält man, indem sich auf der rechten Seite zwei Glieder gegenseitig wegheben:

$$C\varphi'' = Pxy''. \qquad (5)$$

In diese Gleichung kann nun sofort der Wert von y'' aus Gleichung (3) eingeführt werden. Man erhält:

$$C\varphi'' = - \tfrac{1}{2} P^2 x^2 \sin 2 \varphi \cdot \frac{B_1 - B_2}{B_1 B_2}.$$

Die Grösse φ kann hier noch jeden beliebigen endlichen Wert annehmen. Die Differentialquotienten von φ aber sind, wie aus Gleichungen (4) und (5) hervorgeht, von derselben Grössenordnung wie y und seine Differentialquotienten. Man kann daher, wenn φ von Anfang an endlich ist, es wegen seiner geringen Variation näherungsweise konstant setzen. Dann macht die Lösung der Differentialgleichung weiter keine Schwierigkeiten. Doch ist dieser Fall hier nicht von Wichtigkeit, da ja, wie im Eingang bemerkt wurde, gerade dann die eigentümlichen Erscheinungen auftreten, wenn φ zu Anfang null oder wenigstens sehr klein war. Ist aber φ zu Anfang klein, so wird es auch klein bleiben, solange y klein bleibt, kurz solange, als überhaupt die Voraussetzungen für die Differentialgleichung erfüllt sind. Man kann daher in obiger Differentialgleichung mit vollem Recht statt des Sinus den Bogen einführen und erhält dann statt $\frac{1}{2} \sin 2 \varphi$ einfach φ.

Eine andere Vereinfachung betrifft noch den Bruch $\frac{B_1 - B_2}{B_1 B_2}$. Ist, wie vorausgesetzt, B_1 gross gegen B_2, so kann letzteres gegen ersteres vernachlässigt werden, und der Bruch vereinfacht sich zu $\frac{1}{B_2}$. Will man übrigens diese Vernachlässigung vermeiden, so muss man folgerichtig auch einen andern Einfluss von der gleichen Grössenordnung mit berücksichtigen, der, wie eine später zu erfolgende Betrachtung lehrt, von der Stabkrümmung nach der Z-Richtung herrührt. Da dieser hier ganz ausser Acht gelassen sei, wird man konsequenter Weise auch die zweite Vernachlässigung unterlassen, da die Genauigkeit der Rechnung durch letztere nicht sehr wesentlich herabgedrückt wird.

In ihrer vereinfachten Form lautet nun die Differentialgleichung für φ folgendermassen:

$$B_2 C\varphi'' + P^2 x^2 \varphi = 0. \qquad (6)$$

Ich habe im obigen die Grundlagen und hernach die nötigen Vernachlässigungen sehr ausführlich behandelt, und zwar mit Absicht; denn ich halte es in solchen Dingen für ausserordentlich wichtig, gerade über diese Umstände sich volle Klarheit zu verschaffen. Nur zu leicht kommt es vor, dass eine nicht in allen ihren Konsequenzen verfolgte Annahme oder Vernachlässigung die Schuld an einem falschen Ergebnis trägt.

Die Differentialgleichung (6) ist eine Riccati'sche; sie wird in geschlossener Form durch Besselsche Funktionen integriert (Lommel, Besselsche Funktionen*), S. 113). Die Lösung lautet:

$$\varphi = \sqrt{x}\left\{A_1 \mathcal{J}^{\frac{1}{4}}\left(\frac{Px^2}{2\sqrt{BC}}\right) + A_2 \mathcal{J}^{\frac{1}{4}}\left(\frac{Px^2}{2\sqrt{BC}}\right)\right\}$$

Wenn nun auch diese Lösung, auf welche mich Herr Prof. Lindemann aufmerksam gemacht hat, als geschlossene Lösung gewisse Vorteile bietet, so haben mich doch verschiedene Gründe bestimmt, die ursprüngliche Lösung durch Potenzreihen in der Hauptsache beizubehalten. Einmal sind für die Besselschen Funktionen mit dem Index $\pm \frac{1}{4}$ Tafeln nicht bekannt, die Funktionen müssten also doch in Reihen entwickelt und berechnet werden. Ferner lässt sich y, die andere Veränderliche des Problems, die der Differentialgleichung dritter Ordnung (erhalten durch Fortschaffen von φ aus Gleichungen (3) und (4))

$$BC\,(xy''' - y'') - P^2x^2\,(xy' - y) = 0$$

genügen muss, in geschlossener Form nur durch Integrale über Produkte von Besselschen Funktionen darstellen, für die bestimmte Rechnungsmethoden nicht vorliegen. Die Auflösung mit Reihen dagegen bietet, neben ihrer Einfachheit und Verständlichkeit auch für den weniger Geübten, noch den Vorteil grosser Einheitlichkeit, indem die Grössen, welche die Gestalt des Stabes bestimmen, entsprechend ihrer Gleichberechtigung auch durch gleiche Formen zur Darstellung gebracht werden.

Die weiteren Rechnungen mit den Besselschen Funktionen lasse ich am Ende des Abschnittes I B folgen und wende mich jetzt der Lösung durch Potenzreihen zu. Setzt man:

$$\varphi = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots\ldots,$$

*) Studien über die Besselschen Funktionen von Dr. E. Lommel, Leipzig 1868.

so kann für die Koefficienten A sofort eine Rekursionsformel angegeben werden. Sie lautet:

$$n\,(n-1)\,A_n + \frac{P^2}{B_2C}\,A_{n-4} = 0.$$

Die vollständige Lösung hat zwei Integrationskonstanten. Wird zur Abkürzung N für $\frac{P^2}{B_2C}$ geschrieben, so ist:

$$\varphi = A_0\left(1 - \frac{x^4N}{4\cdot 3} + \frac{x^8N^2}{8\cdot 7\cdot 4\cdot 3} - \frac{x^{12}N^3}{12\cdot 11\cdot 8\cdot 7\cdot 4\cdot 3} + \cdots\right)$$
$$+ A_1\left(x - \frac{x^5N}{5\cdot 4} + \frac{x^9N^2}{9\cdot 8\cdot 5\cdot 4} - \frac{x^{13}N^3}{13\cdot 12\cdot 9\cdot 8\cdot 5\cdot 4} + \cdots\right) \quad (7)$$

Die Gleichung (5): $C\varphi'' = Pxy''$ führt von dem gefundenen Wert von φ auf den von y; es wird

$$y = \frac{C}{P}\left\{A_0\left(-\frac{x^3N}{3\cdot 2} + \frac{x^7N^2}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3} - \frac{x^{11}N^3}{11\cdot 10\cdot 8\cdot 7\cdot 4\cdot 3} + \cdot\cdot\right)\right.$$
$$+ A_1\left(-\frac{x^4N}{4\cdot 3} + \frac{x^8N^2}{8\cdot 7\cdot 5\cdot 4} - \frac{x^{12}N^3}{12\cdot 11\cdot 9\cdot 8\cdot 5\cdot 4} + \cdot\cdot\right)$$
$$\left. + A_2x + A_3\right\} \quad (8)$$

Mit den zwei neu hinzugekommenen Integrationskonstanten enthält die Lösung für y nun vier willkürliche Grössen. Die aus den physikalischen Beziehungen hergeleiteten Gleichungen (3) u. (4), welche — die erstere in ihrer vereinfachten Form — der Übersicht halber hier zusammengestellt sind:

$$B_2y'' = -Px\varphi \quad (3\,\text{a}); \qquad C\varphi' = -P(y - y'x) \quad (4),$$

sind von der zweiten und ersten Ordnung, geben also zusammen drei willkürliche Konstante. Zwischen obigen vier Konstanten muss also noch eine Bedingungsgleichung bestehen. Diese wird erhalten, wenn man in Gleichung (4) die gefundenen Werte von φ und y einträgt; man erhält eine Identität, wenn man $A_3 = -A_1$ setzt. Gleichung (3 a) liefert unter Beachtung von $N = \frac{P^2}{B_2C}$ ebenfalls eine Identität.

Bezeichnet man jetzt mit φ_0, y_0 und y_0' die Werte, welche die Grössen in einem bestimmten Fall im Koordinatenursprung annehmen, so kann man die unbestimmten Konstanten durch

diese drei Grössen ausdrücken. Wie man sich durch Nullsetzen von x überzeugt, wird:

$$A_0 = \varphi_0,\ A_1 = -\frac{P}{C}\,y_0 \text{ und } A_2 = \frac{P}{C}y_0'.$$

Die Gleichungen (3a) und (4), auf denen sich die ganze bisherige Rechnung aufbaut, sind zunächst abgeleitet für den in Abbildung 1 und 2 dargestellten einfachen Belastungsfall. Ihre Anwendung ist aber durchaus nicht auf diesen Fall beschränkt. Für einen beliebig belasteten Stab lehrt die Theorie von der Kräftezusammensetzung im Raum, dass man die in einem Querschnitte von der einen Stabhälfte auf die andere übertragenen Kräfte immer ersetzen kann durch eine resultierende Kraft und ein Moment, dessen Ebene zur Kraftrichtung senkrecht steht.

Wird zunächst dieses Moment, das in unserem Falle eine Biegung in der Y-Richtung hervorbringt (M_0), gleich Null angenommen (was übrigens in der Mehrzahl der Fälle zutrifft), so ergibt sich folgendes: Legt man die Z-Achse unseres Koordinatensystems zusammenfallend mit der resultierenden Kraft, die für irgend einen Querschnitt gefunden wurde, so hat das obige Gleichungssystem, wie man durch nähere Betrachtung leicht findet, soweit nach links und rechts von jenem Querschnitt aus Giltigkeit, als der Stab von äusseren Kräften frei ist. Genau wie bei der gewöhnlichen Biegung zerfällt eben auch hier die elastische Linie an jeder Kraftangriffstelle in zwei Zweige, deren Konstanten besonders bestimmt werden müssen. — Da in allen hieher gehörigen Fällen die Belastung der Hauptsache nach in der durch Stabachse und grosse Querschnittshauptachse bestimmten Ebene auftritt, lässt sich übrigens eine sehr einfache Deutung der Konstanten finden. Die in den Formeln vorkommende Kraft P ist nichts anderes, als die Schubkraft in dem betreffenden Abschnitte des Stabes; $P\cdot\varphi_0$ ist die Schubkraftkomponente in der Richtung der kleinen Hauptachse, $P\cdot y_0$ endlich ist das Torsionsmoment im Querschnitt $x = 0$. — Die Konstante y_0' kommt hier weiter nicht in Betracht, sie bleibt willkürlich. Es kann dies so gedeutet werden, dass man eine Variation von y_0' aufzufassen hat als eine kleine Drehung des Koordinatensystems um die Z-Achse, bei der die charakteristischen Grössen φ_0 und y_0 ungeändert bleiben.

Verschwindet für den Querschnitt $x = 0$ das oben erwähnte Biegungsmoment M_0 nicht, so muss die Gleichung (3a) eine

eine Erweiterung erfahren, die sich aus Gleichung (1) ergibt; es wird nämlich:

$$B_2 y'' = -Px\varphi - M_0,$$

oder mit einer dem vorhergehenden analogen Bezeichnung:

$$B_2\,(y'' - y_0'') = -Px\varphi. \tag{3b}$$

Trägt man hierin den Wert von y'' aus Gleichung (5) ein, die unverändert gilt, so ergibt sich statt Gleichung (6)

$$B_2 C\varphi'' + P^2x^2\varphi = B_2 Pxy_0''. \tag{6a}$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung mit zweitem Glied. Ihre Lösung setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung der Gleichung ohne zweites Glied und einer Partikularlösung mit zweitem Glied; da die erstere bereits gegeben ist [Gleichung (7) und (8)], brauche ich hier nur die letztere angeben. Sie zeigt sich als eine Potenzreihe von demselben Bildungsgesetz wie die früheren, und lautet:

$$\varphi_1 = \frac{y_0''P}{C}\left(\frac{x^3}{3\cdot 2} - \frac{x^7 N}{7\cdot 6\cdot 3\cdot 2} + \frac{x^{11}N^2}{11\cdot 10\cdot 7\cdot 6\cdot 3\cdot 2} - \cdots\cdots\right), \tag{9}$$

woraus sich weiter ergibt:

$$y_1 = y_0''\left(\frac{x^2}{2\cdot 1} - \frac{x^6 N}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2} + \frac{x^{10}N^2}{10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 3\cdot 2} - \cdots\cdots\right). \tag{10}$$

Das allgemeine Problem des Stabes mit konzentrierten Einzellasten ist hiemit gelöst. Nun sei nur kurz noch auf eine Art Ausnahmefall hingewiesen, nämlich auf den Fall, dass lediglich ein in der XZ-Ebene wirkendes Biegungsmoment den Stab belastet. Man kann dieses Moment auffassen als die Wirkung einer unendlich kleinen Kraft am unendlich grossen Hebelarm. Nach den früheren Festsetzungen ist daher in unseren Formeln $x = \infty$ und $P = 0$, dagegen $P\cdot x = M$; aus Gleichung (6) wird dann:

$$B_2 C\varphi'' + M^2\varphi = 0. \tag{6b}$$

Bezeichnet x_0 die (ebenfalls unendlich grosse) Koordinate eines Punktes des Stabes, so wird die Lösung der vorliegenden Differentialgleichung:

$$A_1 \sin\left((x - x_0)\frac{M}{\sqrt{B_2C}}\right) + A_2 \cos\left((x - x_0)\frac{M}{\sqrt{B_2C}}\right) \tag{11}$$

Man hätte natürlich auch statt des Grenzübergangs das Moment in Komponenten nach dem Hilfskoordinatensystem der Abb. 3 zerlegen und Gleichung (1) und (2) auf diese Komponenten anwenden können. Statt der Gleichung (3 a) und (4) erhält man auf diese Weise:

$$B_2 y'' = -M\varphi \text{ und } C\varphi' = My'.$$

Aus der letzteren Gleichung ergibt sich

$$y = \frac{C}{M}\varphi + A_3. \tag{12}$$

Aus dieser Lösung lässt sich auch ein Schluss auf die durch die Potenzreihen der allgemeinen Lösung der gestellten Funktionen ziehen. Sie werden im Unendlichen zu Wellenlinien, deren Wellenlänge umgekehrt proportional des Abszisse x ist

$$\left(\sin\left((x-x_0)\frac{Px}{\sqrt{B_2C}}\right) \text{ in Formel (11)}\right).$$

Zu demselben Ergebnis gelangt man übrigens auch durch Diskussion der Bessel'schen Funktionen. Nach Lommel, die Bessel'schen Funktionen S. 65 ist für sehr grosse x näherungsweise

$$\sqrt{x}\,\mathcal{J}^{\frac{1}{4}}\left(\frac{Px^2}{2\sqrt{B_2C}}\right) = 2\sqrt{\frac{\sqrt{B_2C}}{\pi\cdot P\cdot x}}\cos\left(\frac{Px^2}{2\sqrt{B_2C}} - \frac{3\pi}{8}\right).$$

Aus dieser Formel ist gleichzeitig auch ersichtlich, dass die Maximalwerte von φ für die einzelnen Wellen annähernd der Wurzel von x umgekehrt proportional sind. Die Maxima der Ausbiegungen y nehmen nach Gleichung (12), in der M durch P_x ersetzt wird, umgekehrt proportional der $^3/_2$ten Potenz von x ab.

Für die endlichen Teile der Funktionen ergibt sich aus den Rechnungen des folgenden Abschnittes, dass auch sie einen wellenförmigen Charakter zeigen. Wellenlänge und Amplitude sind dabei veränderliche Grössen.

B. Berechnung von Tafeln für die erhaltenen Funktionen.

Die Grenzbedingungen, wie sie gewöhnlich vorliegen, sind Aussagen über die Werte von φ, y und y' an den Enden des betreffenden Zweiges. Die allgemeine Lösung stellt jede von diesen drei Grössen als eine Summe von drei (noch mit willkürlichen Faktoren multiplizierten) Potenzreihen hin. Um nun mit den neu

durch diese Potenzreihen zur Darstellung gebrachten Funktionen leichter rechnen zu können, werden mit Vorteil Tafeln dafür gerechnet. Dadurch wird auch die Uebersicht über die verschiedenen Verhältnisse um vieles klarer.

Als Argument für die Funktionen wird am besten eine dimensionslose Grösse gewählt, da die Funktionswerte dann von jeder Massstabskonstante frei sind. Eine solche dimensionslose Grösse ist:

$$x^4 N = \frac{x^4 P^2}{B_2 C} = \frac{\text{cm}^4\ \text{kg}^2}{(\text{kg cm}^2)^2} = \text{cm}^0\ \text{kg}^0,$$

oder auch irgend eine Potenz davon. Ich habe die Quadratwurzel davon gewählt, einmal, weil dann zwischen der Kraft P und dem (im folgenden mit u bezeichneten) Argument Proportionalität herrscht, dann aber auch deshalb, weil mit dieser Wahl die Reihen eine äusserliche Ähnlichkeit mit der Cosinusreihe erhalten und daher ähnlich günstige Verhältnisse für die Rechnung vermuten liessen. Unter diesen „günstigen Verhältnissen" soll vor allem die Eigenschaft verstanden werden, dass bei gleichbleibenden Intervallen des Arguments die Funktion durch die berechneten Werte überall in gleicher Genauigkeit dargestellt wird, so dass also nirgends ein Einschieben von Zwischenpunkten nötig wird, aber auch nirgends überflüssig viele Punkte gerechnet werden. Die ausgesprochene Vermutung hat sich auch, soweit man es erwarten konnte, bestätigt.

Mit Einführung des Argumentes u bekommen die Gleichungen für φ, y' und y die Form, welche ich jetzt anschreibe:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi &= \varphi_0\left(1 - \frac{u^2}{4\cdot 3} + \frac{u^4}{8\cdot 7\cdot 4\cdot 3} - \frac{u^6}{12\cdot 11\cdot 8\cdot 7\cdot 4\cdot 3} + \cdots\cdots\right)\\
&+ y_0\frac{Px}{C}\left(-1 + \frac{u^2}{5\cdot 4} - \frac{u^4}{9\cdot 8\cdot 5\cdot 4} + \frac{u^6}{13\cdot 12\cdot 9\cdot 8\cdot 5\cdot 4} - \cdots\right)\\
&+ y_0''\frac{Px^3}{C}\left(\frac{1}{3\cdot 2} - \frac{u^2}{7\cdot 6\cdot 3\cdot 2} + \frac{u^4}{11\cdot 10\cdot 7\cdot 6\cdot 3\cdot 2} - \cdots\cdots\right)\\
y &= y_0 + \varphi_0\frac{C}{Px^2}\left(-\frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{6\cdot 4\cdot 3} - \frac{u^6}{10\cdot 8\cdot 7\cdot 4\cdot 3} + \cdots\cdots\right)\\
&+ \frac{y_0}{x}\left(\frac{u^2}{3} - \frac{u^4}{7\cdot 5\cdot 4} + \frac{u^6}{11\cdot 9\cdot 8\cdot 5\cdot 4} - \cdots\cdots\cdots\right)\\
&+ y_0'' x\left(1 - \frac{u^2}{5\cdot 3\cdot 2} + \frac{u^4}{9\cdot 7\cdot 6\cdot 3\cdot 2} - \cdots\cdots\cdots\right)
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} y = y_0 x &+ \varphi_0 \frac{C}{Px}\left(-\frac{u^2}{3\cdot 2} + \frac{u^4}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3} - \frac{u^6}{11\cdot 10\cdot 8\cdot 7\cdot 4\cdot 3} + \cdot\right) \\ &+ y_0\left(1 + \frac{u^2}{4\cdot 3} - \frac{u^4}{8\cdot 7\cdot 5\cdot 4} + \frac{u^6}{12\cdot 11\cdot 9\cdot 8\cdot 5\cdot 4} - \cdot\cdot\right) \\ &+ y_0'' x^2\left(\frac{1}{2\cdot 1} - \frac{u^2}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2} + \frac{u^4}{10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 3\cdot 2} - \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\right) \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Im folgenden sollen diese neun Funktionen einfach mit Buchstaben bezeichnet werden, und zwar, um sie von allen anderen Grössen wirksam zu unterscheiden, sind sie durch Groteskschrift kenntlich gemacht.

$$\left.\begin{aligned} C\varphi &= C\varphi_0 \mathbf{D} + Pxy_0 \mathbf{G} + Px^3 y_0'' \mathbf{K} \\ Px^2 y' &= C\varphi_0 \mathbf{E} + Pxy_0 \mathbf{H} + Px^3 y_0'' \mathbf{L} + Px^2 y_0' \\ Pxy &= C\varphi_0 \mathbf{F} + Pxy_0 \mathbf{J} + Px^3 y_0'' \mathbf{M} + Px^2 y_0' \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Aus den Gleichungen (15) ist die neue Bezeichnung erkenntlich. Im übrigen unterscheiden sich die Gleichungen (15) von den Gleichungen (14) nur dadurch, dass die verschiedenen Nenner weggeschafft sind. Zur klareren Uebersicht über die Bezeichnungen dient noch nebenstehendes Schema, das einer näheren Erklärung nicht bedarf.

	φ_0	y_0	y_0''
φ	**D**	**G**	**K**
y'	**E**	**H**	**L**
y	**F**	**J**	**M**

Bevor ich auf die Berechnung der Tafelwerte näher eingehe, ist es nötig, etwas über die erforderliche Genauigkeit zu sagen.

Bei den Festigkeits- und Elastizitätsversuchen, wie sie in Materialprüfungslaboratorien ausgeführt werden, pflegt man die Genauigkeit im Mittel zu rund 1% anzunehmen. Wenn nun das Ergebnis der Rechnung, das mit den Versuchen verglichen werden soll, genau bis auf ½% wäre, so würde das für die Praxis vollauf genügen. Nun pflegt man freilich, und das mit Recht, bei Arbeiten, die in erster Linie wissenschaftlicher Natur sind, zu verlangen, dass die Rechnung wenn möglich so genau ist, dass ihre Genauigkeit von den Versuchen unter keinen Umständen erreicht wird. Wenn ich mir nun für die wichtigeren Resultate der folgenden Rechnungen eine Genauigkeit von 1‰, also das

10fache der mittleren Versuchsgenauigkeit, zur Richtschnur genommen habe, so glaube ich damit nicht viel vom Richtigen — fast möchte ich sagen: Schicklichen — ferne zu sein. Bei minder wichtigen Resultaten, wie z. B. bei der Abhandlung über den schiefgestellten Stab, habe ich die Genauigkeit niedriger bemessen. Dort ist die Genauigkeit etwa ½ bis ¼%.

Die Tafelwerte der obigen Funktionen wurden, der Genauigkeit von 1‰ entsprechend auf drei Dezimalen berechnet, nur die Funktionen **K** und **M**, welche sehr kleine Absolutwerte besitzen, wurden auf vier Dezimalen gerechnet. Als Intervall wurde für die Funktionen **D, E, F, G, H** und **J** in dem Gebiet von $u = 0$ bis $u = 8{,}0$ die Grösse 0,2 angenommen. Von $u = 8$ bis $u = 12$, welches Gebiet weniger beansprucht wird, wurden die genannten Funktionen nur für die ganzzahligen Werte des Arguments berechnet. Bei den Funktionen **K, L** und **M**, die für die Anwendung weniger wichtig sind, geschah dies im ganzen Bereich.

Zur Berechnung von Zwischenwerten genügt im Intervall 0,2 in den allermeisten Fällen schon die lineare Interpolation; im Notfall stünde dann immer noch die quadratische zu Gebote. Für die Intervalle 1,0 eignet sich am besten die graphische Interpolation. Einige (mindestens drei, besser mehr) Funktionswerte werden in geeignetem Massstabe auf Millimeterpapier als Ordinaten aufgetragen und eine möglichst stetig gekrümmte Kurve durch die erhaltenen Punkte gezogen, worauf jeder beliebige Zwischenwert aus der Zeichnung herausgelesen werden kann. Bei einiger Uebung und Sorgfalt ist es dabei möglich, für etwa 2 cm Abstand der gerechneten Punkte und bei einem Krümmungsradius von 10 cm oder darüber, die Kurve so genau zu ziehen, dass sich Fünftel-Millimeter noch mit ziemlicher Sicherheit entnehmen lassen.

Noch ein paar Worte über die Hülfsmittel bei Zahlenrechnungen: Die Logarithmentafel habe ich fast nicht benützt, dagegen in ausgiebigem Masse den Rechenschieber und die Rechenmaschine. Der Rechenschieber ist die Logarithmentafel des Ingenieurs, er wird überall da angewendet, wo eine allzugrosse Genauigkeit nicht von Nöten ist, also bei Festigkeits-, Gewichts-, Energie-Berechnungen u. s. w. Der gewöhnliche Typus des Rechenschiebers besitzt zwei logarithmische Teilungen; auf der einen ist log 10 = 125 mm, auf der anderen log 10 = 250 mm. Betreffs der Genauigkeit der mit dem Rechenschieber ausgeführten Rech-

nungen gab sich bei der vorliegenden Arbeit Gelegenheit zur Untersuchung, indem ich ca. 30 mit dem Schieber gerechnete Werte mit denen verglich, die ich später der grösseren Genauigkeit halber mit der Rechenmaschine ermittelte. Es ergab sich, dass bei sorgfältigster Arbeit der wahrscheinliche Fehler, begangen bei einer einfachen Multiplikation oder Division, noch unter $^1/_2$ ‰ heruntergebracht werden kann. Nimmt man nun etwa den vierfachen wahrscheinlichen Fehler als den grössten praktisch vorkommenden Fehler an, so ergibt sich, dass das Resultat einer einfachen Multiplikation oder Division höchstens um 2 ‰ falsch sein kann. Bei der Berechnung der Tafelwerte wurden in der Regel Glieder unter der Grösse 0,300—0,400 mit dem Schieber, grössere dagegen mit der Rechenmaschine gerechnet.

Diese Rechenmaschine, Eigentum des mechanisch-technischen Laboratoriums, ist von Thomas de Colmar in Paris; sie gestattet zwei sechsstellige Zahlen voll miteinander auszumultiplizieren, und umgekehrt auch entsprechende Divisionen auszuführen. Die sechsstelligen Zahlen kamen bei der Ausrechnung sehr wohl in Anwendung, da die Reihen bei den höheren Werten des Arguments immer schlechter konvergieren. Bei den Reihen E und H, deren Konvergenz merklich schlechter ist, als die der andern Reihen, dürften von $u = 10{,}0$ an die letzten Stellen der Funktionswerte mit ziemlicher Unsicherheit behaftet sein, da hier die sechsstellige Rechnung keine Korrekturstelle mehr lieferte. So wurde beispielsweise für $u = 12{,}0$ bei der Funktion E die 22. Potenz von u noch berücksichtigt; die Summe aller positiven Glieder betrug 686,186, die Summe aller negativen 689,223, so dass der Funktionswert mit — 3,037 erhalten wurde. In Hinsicht auf die Genauigkeit der graphischen Interpolationsmethode ist indessen diese Unsicherheit wegen der grossen Differenzen zwischen den benachbarten Funktionswerten ziemlich belanglos.

Auf die numerische Ausrechnung der Tafelwerte werde ich hier weiter nicht eingehen; sie bietet nichts, was von Interesse wäre; auch glaube ich nicht, dass, wenn sie hier aufgeführt wäre, sich jemand die Mühe nähme, sie nachzurechnen.

Ich lasse also jetzt die gerechneten Werte folgen; sie stehen auf Seite 25 und 26 zusammengestellt.

u	D	E	F	G	H	J
0,0	+ 1,000	0,000	0,000	— 1,000	0,000	+ 1,000
0,2	0,997	— 0,020	— 0,007	— 0,998	+ 0,013	1,003
0,4	0,987	— 0,080	— 0,027	— 0,992	0,053	1,013
0,6	0,970	— 0,178	— 0,060	— 0,982	0,119	1,030
0,8	0,947	— 0,314	— 0,106	— 0,968	0,210	1,053
1,0	0,918	— 0,486	— 0,165	— 0,950	0,326	1,082
1,2	0,883	— 0,692	— 0,236	— 0,929	0,465	1,118
1,4	0,842	— 0,928	— 0,319	— 0,904	0,626	1,160
1,6	0,796	— 1,192	— 0,414	— 0,876	0,807	1,208
1,8	0,745	— 1,480	— 0,520	— 0,845	1,007	1,261
2,0	0,690	— 1,788	— 0,636	— 0,811	1,223	1,319
2,2	0,630	— 2,111	— 0,762	— 0,774	1,453	1,383
2,4	0,567	— 2,447	— 0,897	— 0,735	1,694	1,451
2,6	0,501	— 2,790	— 1,040	— 0,693	1,946	1,524
2,8	0,433	— 3,135	— 1,191	— 0,649	2,204	1,601
3,0	0,362	— 3,479	— 1,349	— 0,603	2,466	1,682
3,2	0,291	— 3,816	— 1,513	— 0,556	2,729	1,766
3,4	0,219	— 4,142	— 1,682	— 0,508	2,990	1,852
3,6	0,147	— 4,452	— 1,855	— 0,459	3,248	1,941
3,8	0,075	— 4,740	— 2,032	— 0,410	3,501	2,032
4,0	0,004	— 5,004	— 2,211	— 0,361	3,744	2,125
4,2	— 0,065	— 5,241	— 2,392	— 0,311	3,976	2,219
4,4	— 0,132	— 5,448	— 2,574	— 0,262	4,194	2,314
4,6	— 0,196	— 5,621	— 2,757	— 0,214	4,396	2,410
4,8	— 0,256	— 5,757	— 2,938	— 0,167	4,581	2,506
5,0	— 0,313	— 5,853	— 3,118	— 0,121	4,746	2,600
5,2	— 0,365	— 5,913	— 3,296	— 0,076	4,891	2,695
5,4	— 0,412	— 5,924	— 3,472	— 0,033	5,014	2,789
5,6	— 0,456	— 5,906	— 3,645	+ 0,008	5,113	2,881
5,8	— 0,493	— 5,841	— 3,814	+ 0,047	5,188	2,971
6,0	— 0,524	— 5,737	— 3,978	+ 0,083	5,238	3,059

u	D	E	F	G	H	J
6,0	— 0,524	— 5,737	— 3,978	+ 0,083	+ 5,238	+ 3,059
6,2	— 0,551	— 5,594	— 4,137	0,116	5,263	3,145
6,4	— 0,572	— 5,415	— 4,291	0,147	5,264	3,229
6,6	— 0,588	— 5,202	— 4,440	0,175	5,240	3,310
6,8	— 0,596	— 4,957	— 4,584	0,200	5,192	3,388
7,0	— 0,597	— 4,684	— 4,721	0,222	5,121	3,463
7,2	— 0,594	— 4,387	— 4,852	0,241	5,028	3,534
7,4	— 0,585	— 4,073	— 4,977	0,257	4,914	3,602
7,6	— 0,569	— 3,743	— 5,097	0,270	4,781	3,667
7,8	— 0,550	— 3,404	— 5,210	0,279	4,631	3,728
8,0	— 0,523	— 3,062	— 5,317	0,286	4,465	3,781
9,0	— 0,331	— 1,487	— 5,776	0,276	3,487	4,022
10,0	— 0,078	— 0,642	— 6,144	0,203	2,494	4,179
11,0	+ 0,200	— 1,080	— 6,478	0,097	1,807	4,280
12,0	+ 0,404	— 3,037	— 6,851	— 0,014	1,676	4,454

u	K	L	M
0,0	0,1667	1,000	0,5000
1,0	0,1627	0,967	0,4945
2,0	0,1514	0,874	0,4785
3,0	0,1337	0,734	0,4534
4,0	0,1117	0,569	0,4216
5,0	0,0875	0,404	0,3858
6,0	0,0634	0,258	0,3488
7,0	0,0412	0,151	0,3133
8,0	0,0223	0,092	0,2815
9,0	0,0092	0,080	0,2548
10,0	0,0004	0,107	0,2338
11,0	−0,0039	0,159	0,2186
12,0	−0,0042	0,220	0,2081

Ich komme jetzt auf die Lösung mit Bessel'schen Funktionen zurück. Die Differentialgleichung mit zweitem Glied (6a):

$$BC\varphi'' + P^2x^2\varphi = BPxy_0''$$

werde der Einfachheit halber $\varphi'' + a^2x^2\varphi = bx$ geschrieben, wobei dann $a = \frac{P}{\sqrt{BC}}$ und $b = \frac{P}{C}y_0''$ zu setzen ist.

Führt man nun in dieser Gleichung für φ die Grösse $z\sqrt{x}$ ein, substituiert ferner die unabhängige Variable $t = \frac{ax^2}{2}$ (Heine, Kugelfunktionen,*) Bd. I, S. 241), so geht die Gleichung über in:

$$t^2\frac{d^2z}{dt^2} + t\frac{dz}{dt} + \left(t^2 - (\tfrac{1}{4})^2\right)z = \frac{b}{4}\left(\frac{2t}{a}\right)^{\frac{5}{4}} = k\,t^{\frac{5}{4}}$$

Dies ist eine Bessel'sche Differentialgleichung mit zweitem Glied, deren Lösung nach „Mathemat. Annalen" Bd. IX, S. 427**) folgendermassen geschrieben werden kann:

$$z = A_1\mathcal{J}^{\frac{1}{4}}(t) + A_2\mathcal{J}^{-\frac{1}{4}}(t) + k\,S^{\frac{1}{4},\frac{1}{4}}(t)$$

Das Argument t findet man durch Vergleich mit Seite 21 zu

$$t = \frac{u}{2} = \frac{Px^2}{2\sqrt{BC}}$$

Unter Berücksichtigung des Wertes von k ergibt sich nun

$$\varphi = z\sqrt{x} = \sqrt{x}\left(A_1\mathcal{J}^{\frac{1}{4}}(\tfrac{u}{2}) + A_2\mathcal{J}^{-\frac{1}{4}}(\tfrac{u}{2}) + \frac{P}{C}y_0''\left(\frac{P}{\sqrt{BC}}\right)^{-\frac{5}{4}}\cdot 2^{-\frac{3}{4}}S^{\frac{1}{4},\frac{1}{4}}(\tfrac{u}{2})\right)$$

Diese Formel muss mit der ersten der Gleichungen (14) identisch sein. Um dies zu zeigen, entwickelt man die Bessel'schen Funktionen in Potenzreihen, was in Gleichung VIII, S. 15 des Lommel'schen Buches ausgeführt ist. Man findet hier:

$$\mathcal{J}^{\frac{1}{4}}(\tfrac{u}{2}) = \frac{u^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}\,\Gamma(\frac{5}{4})}\left(1 - \frac{u^2}{5\cdot 4} + \frac{u^4}{9\cdot 8\cdot 5\cdot 4} - \cdots\right)$$

Die in der Klammer stehende Reihe ist aber gleich der mit negativem Zeichen versehenen Reihe **G**, also wird

$$\mathcal{J}^{\frac{1}{4}}(\tfrac{u}{2}) = -\frac{u^{\frac{1}{4}}\,\mathbf{G}}{\sqrt{2}\,\Gamma(\frac{5}{4})};$$

*) Handbuch der Kugelfunktionen von Dr. E. Heine, Berlin 1878.
**) Dr. E. Lommel, „Ueber allgemeinere Bessel'sche Funktionen".

ebenso wird

$$\mathcal{J}^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{u^{-\frac{1}{4}}\sqrt{2}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\left(1 - \frac{u^2}{4\cdot 3} + \frac{u^4}{8\cdot 7\cdot 4\cdot 3} - \cdots\cdots\right) = \frac{u^{-\frac{1}{4}}\sqrt{2}\,\mathsf{D}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}.$$

Die vorstehenden Formeln können dazu benützt werden, aus den Tafeln für die Reihen **D** und **G** die entsprechenden Bessel-Funktionen zu finden. Durch Ausrechnung der Zahlenfaktoren erhält man

$$\mathcal{J}^{\frac{1}{4}}\left(\frac{u}{2}\right) = -0{,}78012\, u^{\frac{1}{4}}\mathsf{G}(u), \text{ und } \mathcal{J}^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{u}{2}\right) = 1{,}15407\, u^{-\frac{1}{4}}\,\mathsf{D}(u).$$

Die Partikularlösung

$$\varphi_{(1)} = \frac{P}{C}y_0'' \cdot 2^{-\frac{3}{4}}\left(\frac{P}{\sqrt{BC}}\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{x}\, S^{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}\left(\frac{u}{2}\right)$$

unterscheidet sich von der in Gleichung (9) angegebenen durch ein Glied von der Form

$$\alpha\sqrt{x}\left(\sqrt{2}.\mathcal{J}^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{u}{2}\right) - \mathcal{J}^{\frac{1}{4}}\left(\frac{u}{2}\right)\right),$$

dessen Hinzunahme nichts weiter als eine Veränderung der willkürlichen Konstanten A_1 und A_2 bedeutet. Bringt man dieses Glied in Abzug, so lässt sich der übrigbleibende Teil von $S^{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}\left(\frac{u}{2}\right)$ auf die Form bringen:

$$2^{\frac{5}{4}}\, u^{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{3\cdot 2} - \frac{u^2}{7\cdot 6\cdot 2\cdot 3} + \cdots\cdots\right) = 2^{\frac{3}{4}}u^{\frac{5}{4}}\mathsf{K}$$

(Siehe Math. Annalen Bd. IX. S. 436, Gleichung XV).

Dass die Potenzen von x, die bei den Reihen der Formeln (14) stehen, mit der Lösung durch Bessel'sche Funktionen im Einklang stehen, das ergibt sich leicht, wenn man in diese Lösung die eben für die Bessel'schen Funktionen gefundenen Werte einträgt.

Aus der Lösung für φ kann die für y erhalten werden, indem man die Gleichung

$$y'' = \frac{C\varphi''}{Px} = -\frac{Px}{B}\varphi \text{ zweimal integriert.}$$

Wird, wie gewöhnlich der Fall, $y_0'' = 0$ gesetzt, so hat man

$$y'' = -\frac{Px}{B}\sqrt{x}\left(A_1\mathcal{J}^{\frac{1}{4}}\left(\frac{u}{2}\right) + A_2\mathcal{J}^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{u}{2}\right)\right);$$ da aber $\frac{2\,Px}{\sqrt{BC}} = \frac{du}{dx}$ ist,

erhält man: $$y'' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{P}}\sqrt{\frac{C}{B}}\cdot u^{\frac{1}{4}}\left(A_1\mathcal{J}^{\frac{1}{4}}\left(\frac{u}{2}\right) + A_2\mathcal{J}^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\frac{du}{dx};$$

hieraus: $$y' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{P}}\sqrt{\frac{C}{B}}\left(A_1\int u^{\frac{1}{4}}\,\mathcal{J}^{\frac{1}{4}}\left(\frac{u}{2}\right)du + A_2\int u^{\frac{1}{4}}\,\mathcal{J}^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{u}{2}\right)du\right).$$

Integrale dieser Form werden nach Mathem. Annalen Bd. IX, S. 442 durch Produkte $u\cdot\mathcal{J}\cdot S$ integriert. Da mir aber für die weitere Behandlung dieser Produkte sowie für die zweite Integration eine Methode der Berechnung nicht vorliegt, bezüglich der praktischen Resultate auch kaum etwas Neues zu Tage fördern würde, so habe ich diese Sache weiter nicht mehr verfolgt.

C. Berechnung von bestimmten Belastungsfällen.

Bevor ich auf die Berechnung von einzelnen Fällen eingehe, will ich kurz auf eine Eigenschaft hinweisen, die für alle Arten der Belastung in gleicher Weise zutrifft. Es ist der grundsätzliche Unterschied in dem Verhalten des theoretisch vorausgesetzten absolut geraden Stabes und dem eines wirklich vorhandenen, der sich jenem idealen Zustande zwar beliebig annähern, ihn aber nie erreichen kann.

Der absolut gerade Stab wird seine gestreckte Lage beibehalten bis zur kritischen Last. Durch das Erreichen dieser „Kipplast" — wie sie in Analogie zur „Knicklast" im folgenden bezeichnet werden soll — wird die Gleichgewichtslage, die zuerst stabil war, indifferent; jede Lage, wenn nur die Abweichung von der gestreckten Lage sehr klein gegenüber der Stablänge ist, ist eine Gleichgewichtslage. Ist die Last eine Spur kleiner als die kritische, so kehrt der Stab in die gestreckte Lage zurück; ist sie eine Spur grösser, so verlässt er die nunmehr labile Gleichgewichtslage, um nicht mehr dahin zurückzukehren. Von diesem eigentümlichen Verhalten findet man bei einem Versuche nichts. Selbst wenn man bei mässigen Lasten noch keine Ausbiegung bemerkt, zeigt sich eine solche mit der Annäherung an die Kipplast

immer deutlicher, und es ist nicht möglich, die Kipplast zu erreichen, ohne dass vorher Ausbiegungen entstehen, die wegen ihrer Grösse eine strenge Anwendung der vorliegenden Rechnung nicht mehr zulassen. Trägt man die Kräfte und die zugehörigen Ausbiegungen als Abszissen und Ordinaten eines rechtwinkligen Koordinatensystems auf, so erhält man hyperbelähnliche Kurven, zu denen die Linien der Kipplast und der anfänglichen Lage des Stabes die Asymptoten bilden.

Analytisch zeigen sich diese Verhältnisse folgendermassen: Im idealen Fall sind die Bestimmungsgleichungen für die Grenzwerte homogen in den Grössen y_0, φ_0 u. s. w., durch welche die Grösse der Auslenkung gemessen wird. Sie werden also für alle beliebigen Werte von P erfüllt, wenn y_0, φ_0 u. s. w. sämtlich gleich Null gesetzt werden. Ausserdem werden sie für alle Werte von y_0 u. s. w. erfüllt, wenn u und damit auch P so gewählt wird, dass gerade die Verträglichkeitsdeterminante der homogenen Gleichungen verschwindet. Dieses P ist dann die „Kipplast". — Kommen dagegen in den Gleichungen auch Glieder vor, die die Grössen y_0, φ_0 u. s. w. nicht enthalten, so gibt die Auflösung für jeden Wert von P und u bestimmte Werte von y_0, φ_0 u. s. w. Nach bekannten Sätzen der Gleichungslehre steht aber im Nenner der Auflösungen eben jene Verträglichkeitsdeterminante, durch deren Verschwinden bei der Kipplast eben jenes hyperbolische Anwachsen der Ausschläge zustande kommt.

Da übrigens die Funktionen D, E, F u. s. w., wie schon erwähnt, einen wellenförmigen Verlauf zeigen, so hat die Verträglichkeitsbedingung im allgemeinen unendlich viele Wurzeln; von allen diesen ist der kleinste positive Wurzelwert von u der richtige, alle grösseren beziehen sich auf labile Gestalten der elastischen Linie, von denen jede folgende immer einen Wendepunkt mehr hat.

Ich wende mich jetzt den speziellen Fällen zu. Bei der grossen Anzahl verschiedener möglicher Belastungsfälle, die hier gegenüber der gewöhnlichen Biegung durch die verschiedenen Arten des Lastangriffs und der Einspannung ausserordentlich vermehrt wird, — lassen sich doch aus dem einfachen Fall eines einseitig eingespannten Stabes mit einer Last am Ende ungefähr ein Dutzend verschiedene Fälle herleiten — ist es unmöglich, alle hier zur Sprache zu bringen. Es können daher hier nur einige

bemerkenswerte Fälle behandelt werden. An diesen Beispielen wird sich ja immerhin zeigen, wie derartige Aufgaben anzugreifen und durchzuführen sind.

I. Belastung nur am Ende des Stabes.

1. Hierher gehört vor allem der eingangs erwähnte Belastungsfall. Dieser ist zugleich der wichtigste für die Versuche, weil sich gerade diese Grenzbedingungen am leichtesten und sichersten verwirklichen lassen. Zuerst sei der Fall betrachtet, bei dem alle theoretischen Bedingungen zutreffen. Da die Kraft in der Mitte des Stabquerschnitts angreifen soll, ist $y_0 = 0$; y_0'' ist $= 0$, da ein Moment, welches verkrümmend wirken könnte, im Anfangsquerschnitt nicht vorhanden ist. Die Einspannung des andern Endes findet in der Rechnung ihren Ausdruck dadurch, dass für $x = l$ $\varphi = 0$ werden muss. Es wird also:

$$\varphi_l = \varphi_0\,\mathsf{D} = 0 \quad \text{oder} \quad \mathsf{D} = 0.$$

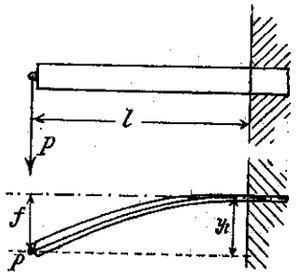


Abb. 5

Aus der Tafel ist zu entnehmen, dass $\mathsf{D} = 0$ wird, wenn u eben den Wert 4,0 überschritten hat. Die genaue Ausrechnung dieses Wertes, der hier dieselbe Bedeutung hat wie der Faktor π^2 in der Euler'schen Knickformel, den ich deshalb auch logarithmisch kontrolliert habe, ergibt $u = 4{,}0126$. Nun ist aber $u = \dfrac{Px^2}{\sqrt{B_2 C}}$; hieraus ergibt sich die Kipplast zu:

$$P_k = \frac{4{,}0126}{l^2}\sqrt{BC} \tag{16}$$

(Der Zeiger 2 von B_2 wurde fortgelassen, da eine Verwechslung nicht möglich ist.)

Zur Berechnung der elastischen Linie muss noch über y_0' eine Annahme gemacht werden. Soll entsprechend der ursprünglichen Voraussetzung die X-Achse des Koordinatensystems der anfänglichen Stabrichtung parallel bleiben, so muss $y_l' = 0$ werden (der Zeiger l soll immer diejenigen Werte kennzeichnen, welche die betreffenden Grössen für $x = l$ annehmen); also: $0 = y_0' + \dfrac{C\varphi_0}{Pl^2}\mathsf{E}_l$; hiermit wird y:

$$y = y_0' x + \frac{C\varphi_0}{Px}\cdot\mathsf{F} = \frac{C\varphi_0}{Pl^2}\left(\mathsf{F}\cdot\frac{l^2}{x} - \mathsf{E}_l\cdot x\right).$$

Für $x = l$ hat die Kurve einen Wendepunkt, denn, wie aus Gleichung (3b) Seite 19 hervorgeht, wird, wenn $y_0'' = 0$ ist, immer da, wo $\varphi = 0$ ist, auch $y'' = 0$.

Für die Durchbiegung f, die, wie aus Abb. 5 ersichtlich, mit y_l identisch ist, wird nun erhalten: $f = \frac{C\varphi_0}{Pl}(\mathsf{F}_l - \mathsf{E}_l)$; berücksichtigt man noch, dass $Pl^2 = u\sqrt{BC}$ ist, und führt die Zahlenwerte von u, F_l und E_l (durch Interpolation zu finden) ein, so erhält man:

$$f = \frac{-2{,}222 + 5{,}018}{4{,}013}\sqrt{\frac{C}{B}} \cdot \varphi_0 \cdot l = 0{,}697\, l \cdot \varphi_0 \sqrt{\frac{C}{B}}. \quad (17)$$

2. Der praktisch vorliegende Fall, dass der Stab beliebige kleine Verdrehungen und Verbiegungen schon vor der Belastung besitzt, lässt sich mit den vorausgehenden Mitteln nicht allgemein behandeln. Es wird indes genügen, dreierlei spezielle Unvollkommenheiten zu beschreiben, deren Behandlung sich aus dem Vorhandenen in einfacher Weise ergibt, und dann aus den Ergebnissen weitere Schlüsse zu ziehen.

Durch die Annahme, dass y_0'' nicht gleich Null ist, sondern irgend einen konstanten kleinen Wert hat, erteilt man dem Stabe sozusagen eine kleine anfängliche Krümmung. Eine kleine anfängliche Exzentrizität der Last wird durch ein konstantes y_0 ausgedrückt. Setzt man endlich φ_l nicht gleich Null, sondern gleich einer Konstanten, so bedeutet das, dass Kraftrichtung und grosse Querschnittshauptachse von Anfang an einen kleinen Winkel mit einander bilden. Löst man nun die Aufgabe unter der Bedingung, dass $y_0'' = \frac{1}{r}$, $y_0 = d$ und $\varphi_l = \varepsilon$ ist, so wird

$$C\varphi_l = C\varepsilon = C\varphi_0\,\mathsf{D} + Pld\,\mathsf{G} + \frac{Pl^3}{r}\,\mathsf{K}, \text{ also}$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{\mathsf{D}}\left(\varepsilon - \frac{Pl^2}{C}\left(\frac{d}{l}\mathsf{G} + \frac{l}{r}\mathsf{K}\right)\right). \quad (18)$$

Aus der Gleichung geht hervor, dass man im allgemeinen für jeden Wert von P ein bestimmtes φ_0, d. h. einen bestimmten Deformationszustand erhält. Wird nun $P = P_k$, so wird $\mathsf{D} = 0$ und daher $\varphi_0 = \infty$, bezw. so gross, dass die Annahme der kleinen Ausschläge nicht mehr giltig ist. Bemerkenswert ist dabei, dass der Verlauf der Werte von φ_0 in der Nähe der Kipplast nur ganz

unwesentlich davon abhängt, welcher von den drei Fehlereinflüssen gerade vorherrscht (die Funktionen G und K haben bei $u = 4{,}0126$ keine Singularitäten). Durch einen Analogieschluss kommt man zu dem Ergebnis, dass der hyperbolische Verlauf der Werte der Ausschläge ganz unabhängig von der speziellen Art der Unregelmässigkeiten auftritt. Mit der Grösse der Abweichungen hängen die Ausschläge linear zusammen, wie Gleichung (18) ersichtlich macht. Als Mass für die Wirkung der Unregelmässigkeiten könnte man geradezu den Grenzwert des Produktes $\varphi_0 \cdot \mathsf{D}$ für die kritische Last benützen, der sich auch experimentell angenähert bestimmen liesse (nämlich graphisch aus dem Verlauf der durch den Versuch ermittelten Hyperbel).

Ein anderer Umstand soll hier noch Erwähnung finden. Hat man es nämlich in der Hand, eine von den erwähnten drei Grössen willkürlich zu verändern, so kann man es dahin bringen, dass der Klammerausdruck in Gleichung (18) für die Kipplast verschwindet; dann wird φ_0 für diese Last $= \frac{0}{0}$, wie im idealen Fall; für alle andern Werte von P hat aber φ_0 irgend welche bestimmte, im allgemeinen von Null verschiedene Werte. Dieser Fall kommt bei den Versuchen zur Anwendung; kann man beispielsweise, wie dies bei meinen Versuchen der Fall war, durch Verdrehen der Klemmvorrichtung um eine horizontale Achse die Grösse φ_l nach Bedürfnis ändern, so kann man es erreichen, dass die Hyperbelkonstante, wenn auch nicht Null, so doch möglichst klein wird, was für die genaue Bestimmung der Kipplast notwendig wird.

3. Anderer Natur als die bisher besprochenen Abweichungen, die man etwa als Abweichungen von der Ebene des biegenden Moments bezeichnen könnte, sind die Abweichungen innerhalb der Ebene des biegenden Moments. Hierher gehört z. B. der Fall, dass die Kraft nicht im Querschnittsmittelpunkt angreift, sondern senkrecht darunter oder darüber. Alle Abweichungen dieser Art bringen keine Verzerrung des theoretischen Verhaltens hervor, wie die eben besprochenen, sondern sie wirken hindernd auf die Grösse der Kipplast ein. Solche Einflüsse müssen daher bei den Versuchen entweder sorgfältig vermieden oder aber in der Rechnung berücksichtigt werden.

Liegt, wie in Abb. 6, der Angriffspunkt der Last um a über der Stabachse, so wird für jeden Wert von φ_0 zugleich ein y_0, eine Entfernung zwischen der Kraftrichtung und der Stabachse

auftreten von der Grösse $y_0 = a\,\varphi_0'$; für das eingespannte Ende erhält man die Beziehung $\varphi_l = 0$, wie früher, also:

$$0 = C\varphi_0 \mathsf{D} + Py_0\, l\, \mathsf{G};$$

setzt man für y_0 seinen Wert und ausserdem für Pl den Ausdruck $\frac{u}{l}\sqrt{BC}$, so wird, da φ_0 nun fortgelassen werden kann:

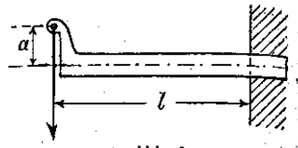


Abb. 6

$$\mathsf{D}\sqrt{\frac{C}{B}} + u\,\mathsf{G}\cdot\frac{a}{l} = 0. \tag{19}$$

Aus dieser Gleichung ist u durch Probieren zu finden. Durch positives a wird u und damit P_k verkleinert; der Grenzwert für $a = \infty$ ist $u = 0$; für negative a dagegen, also Angriff unterhalb der Stabachse, wird die Kipplast erhöht; der Grenzwert für $a = -\infty$ ergibt sich aus $\mathsf{G} = 0$, es wird $u = 5{,}56$.

Soll die hier abgeleitete Beziehung zur Korrektion von Versuchsergebnissen dienen, so handelt es sich meist um sehr kleine Verhältnisse $\frac{a}{l}$; dabei empfiehlt sich dann eine Näherungsformel, die nur die erste Potenz von $\frac{a}{l}$ berücksichtigt. Setzt man also $u = u_0 + a\,\frac{du_0}{da}$, so ergibt die Differentiation der Gleichung (19) nach a, wenn gleich $u = u_0$ und $a = 0$ gesetzt wird:

$$\left(\frac{d\,\mathsf{D}}{du}\right)_0 \cdot \frac{du_0}{da}\sqrt{\frac{C}{B}} + \frac{u\,\mathsf{G}_0}{l} = 0, \quad \text{also } \frac{du_0}{da} = -\frac{u_0\,\mathsf{G}_0}{\left(\frac{d\,\mathsf{D}}{du}\right)_0 l}\sqrt{\frac{B}{C}}.$$

Nun ergibt die Zahlenrechnung für $u_0 = 4{,}013$, $\mathsf{G}_0 = -0{,}358$ und $\left(\frac{d\,\mathsf{D}}{du}\right)_0 = -0{,}348$; infolgedessen erhält man:

$$u = 4{,}013\left(1 - 1{,}03\,\frac{a}{l}\sqrt{\frac{B}{C}}\right), \text{ und damit}$$

$$P_k = \frac{4{,}013}{l^2}\sqrt{BC}\left(1 - 1{,}03\,\frac{a}{l}\sqrt{\frac{B}{C}}\right). \tag{20}$$

Man kann übrigens auch die Grösse Δl ausrechnen, um welche l vergrössert werden muss, damit die einfache Formel (16) dasselbe P_k liefert. Es wird

$$P_k = \frac{4{,}013}{(l+\Delta l)^2}\sqrt{BC} = \frac{4{,}013}{l^2}\left(1 - 1{,}03\,\frac{a}{l}\sqrt{\frac{B}{C}}\right).$$

Wie einfach aus dem binomischen Satze hervorgeht, hat man

$$\Delta l = 0{,}515\; a\sqrt{\frac{B}{C}} \text{ zu setzen.} \tag{21}$$

4. Aehnlich, wie in Absatz 3, liegen die Verhältnisse, wenn die Kraft bei einer Auslenkung des Stabendes sich nicht selbst parallel bleibt, sondern gegen einen bestimmten Punkt hin konvergiert. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn die Belastung des Stabes nicht durch Gewichte in einer freischwebenden Waagschale erfolgt, sondern durch den Zug einer Schnur hervorgerufen wird, wie in der Abb. 7 dargestellt ist. Nach den ursprünglichen Festsetzungen muss hier die Z-Achse des Koordinatensystems mit der Richtung der Schnur zusammenfallen. Deshalb darf jetzt φ_l nicht mehr $= 0$ gesetzt werden, vielmehr ist, wie aus der Abbildung hervorgeht, $\varphi_l = -\frac{y_l}{e}$ zu setzen, wenn mit e die Entfernung des Stabendes vom Konvergenzpunkt bezeichnet wird. Ausserdem ist $y_0 = 0$ wegen des zentrischen Kraftangriffs und $\varphi_0' = 0$ wegen der Einspannung. Aus der letzten Bedingung folgt: $0 = C\varphi_0\,\mathsf{E} + Pl^2 y_0'$; die erste Beziehung gibt dann

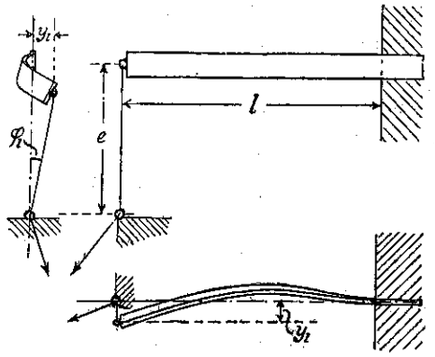


Abb. 7

$$e\,\varphi_l + y_l = 0 = e\,\varphi_0\,\mathsf{D} + \frac{C\varphi_0}{Pl}(\mathsf{F} - \mathsf{E}) \quad \text{oder}$$

$$\frac{e}{l}\,u\cdot\mathsf{D} + \sqrt{\frac{C}{B}}\,(\mathsf{F} - \mathsf{E}) = 0. \tag{22}$$

Aus der Formel ist folgendes zu entnehmen: Ist $\frac{e}{l} = \pm\infty$ (die Kraft bleibt sich parallel), so wird $\mathsf{D} = 0$ und $u = 4{,}0126$. Macht man die Schnur immer kürzer und kürzer, verkleinert also $\frac{e}{l}$ immer mehr und mehr, so wird die Bewegungsfreiheit des Stabendes immer mehr beschränkt, die kritische Last nimmt zu. Nähert sich $\frac{e}{l}$ dem Wert Null, so wird in der Grenze $\mathsf{F} - \mathsf{E} = 0$ oder $u = 6{,}97$.

In der folgenden Tabelle sind einige Werte zusammengestellt, welche ich berechnet habe.

$\frac{e}{l}\sqrt{\frac{B}{C}} =$	∞	2	1	$\frac{1}{2}$	0
$u =$	4,01	4,88	5,49	6,09	6,97

Liegt der Konvergenzpunkt oberhalb des Stabes, was z. B. dadurch zu erreichen ist, dass man mittelst eines an den Enden gelenkig verbundenen Stabes auf den Versuchstab drückt, so wird dadurch die Konstruktion geschwächt, und zwar umsomehr, je kürzer der Druckstab im Vergleich zum Versuchstab ist. Die folgende Tabelle gibt diese Verhältnisse in Zahlen wieder.

$\frac{e}{l}\sqrt{\frac{B}{C}} =$	$-\infty$	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\varepsilon$
$u =$	4,01	3,02	2,23	1,36	0,00

Der in der letzten Spalte stehende Wert bedarf noch einer näheren Aufklärung. Ich habe nicht 0 geschrieben, sondern $-\varepsilon$, was eine sehr kleine negative Grösse bedeuten soll. Für den Wert $\frac{e}{l} = 0$ wurde oben schon gefunden $u = 6{,}97$. Beim Uebergang von positiven zu negativen Werten findet daher ein Sprung im Werte der Kipplast statt. Um klarer zu sehen, seien die Werte von u als Ordinaten zu den Werten eines Winkels ψ als Abszissen aufgetragen, der durch die Gleichung

$$\operatorname{ctg} \psi = \frac{e}{l}\sqrt{\frac{B}{C}}$$

definiert ist (Abb. 8). Bei $\psi = \frac{\pi}{2}$ wird die genannte Unstetigkeit sichtbar. Diese Unstetigkeit ist übrigens nicht analytischer, sondern, wenn ich so sagen darf, praktischer Natur. Sie ist eine einfache Folgerung des schon erwähnten Satzes, dass für die kritische Last die kleinste positive

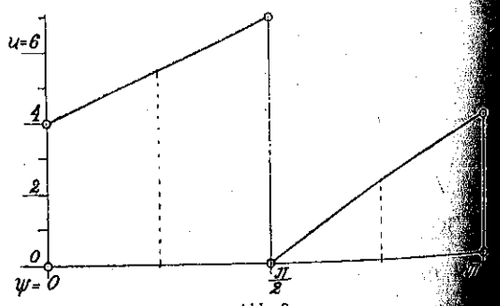


Abb. 8

Wurzel massgebend ist. Der erste Zweig der Kurve hat sehr wohl eine stetige Fortsetzung, die aber, weil sie labilen Zuständen entspricht, für uns praktisch nicht vorhanden ist.

5. Wenn das freie Ende des am andern Ende eingespannten Stabes durch eine senkrechte Führung an seitlicher Bewegung gehindert ist, so tritt beim Auskippen eine horizontale Zwangskraft auf, welche sich mit der senkrecht wirkenden Last zu einer schiefen Resultierenden zusammensetzen lässt. Man sieht, dass sich über φ zunächst keine bestimmten Angaben machen lassen. Dagegen wird $y_l' = 0$, $y_0 = 0$ und $y_l = 0$; die erste Bedingung liefert:

$P l^2 y_0' = -C\varphi_0 \mathsf{E}$, die letztere

$0 = C\varphi_0 (\mathsf{F} - \mathsf{E})$;

Die Bedingung $\mathsf{F} - \mathsf{E} = 0$ ist dieselbe, wie im vorigen Abschnitt die für $e = 0$. Es ist also $u = 6{,}97$ und $P = \frac{6{,}97}{l^2}\sqrt{BC}$. Die Gestalt der Ausbiegung ist aus Abb. 9 ersichtlich.

Abb. 9

6. Eine Reihe von anderen Fällen lässt sich herleiten, wenn das eine Ende nicht eingespannt, sondern um eine senkrechte Achse drehbar ist. Wird das andere Ende senkrecht geführt, so zeigt eine einfache Ueberlegung, dass dies nichts anderes ist, als der unter 1. beschriebene Fall; u ist also $= 4{,}01$. Während die in 3. beschriebenen Verhältnisse hier unverändert Anwendung finden, ist es nicht ebenso mit den unter 4. genannten Einflüssen. Hier wird nämlich durch die Belastung mit einer Schnur die Grösse der Kipplast nicht geändert, da infolge der Art der Befestigung von dem Stabe eine seitliche Kraft nicht aufgenommen werden kann. Aus diesem Grunde kommt auch bei allen hiehergehörigen Fällen ein Schiefstellen der Z-Achse nicht vor, es ist also immer $\varphi = 0$.

Wird nun dafür gesorgt, dass der Anfangsquerschnitt immer senkrecht gestellt bleibt, etwa durch eine Schlitzführung, so wird $\varphi = 0$, y_0 aber wegen des auftretenden Torsionsmoments von Null verschieden. Die Bedingung $\varphi = 0$ liefert dann $\mathsf{G} = 0$. Diesem entspricht $u = 5{,}56$, ein Wert, auch schon als Grenzwert für $e = \infty$ in 3. vorkam (s. Abb. 10).

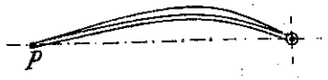


Abb. 10

7. Wird das belastete Ende so geführt, dass es immer in der Ebene des Hauptbiegungsmoments verbleiben muss (was dadurch erreicht werden kann, dass das Ende an einer kräftigen horizontalen Achse befestigt ist, die sich zwar innerhalb der Hauptbiegungsebene beliebig verschieben kann, dabei aber immer sich selbst parallel bleiben muss) so hat man, wenn das andere Ende, wie bei 6., durch eine vertikale Achse gehalten wird, folgendes: φ_l ist, wie schon bemerkt, $= 0$; ausserdem ist $\varphi_0 = 0$; y_0 ist wegen des beim Auskippen auftretenden Torsionsmoments nicht gleich Null, dagegen ist, wenn $y_0' = 0$ gesetzt wird, $y_0 = y_l$; wegen des ferner noch auftretenden Einspannmoments ist (hier zum erstenmal von den behandelten Fällen) y_0'' von Null verschieden. Man erhält also:

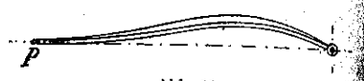


Abb. 11

$$y_l - y_0 = y_0 (\mathsf{J} - 1) + y_0'' l^2 \mathsf{M} = 0$$
$$\frac{C\varphi_0}{Pl} = y_0 \mathsf{G} + y_0'' l^2 \mathsf{K} = 0.$$

Diese beiden Gleichungen sind verträglich, wenn

$$(\mathsf{J} - 1)\,\mathsf{K} - \mathsf{G} \cdot \mathsf{M} = 0 \text{ ist.}$$

Um hieraus u zu ermitteln, wurde der Wert der linken Seite für drei Werte von u gerechnet, und zwar ergaben sich für $u = 7$, 8 und 9 die Zahlen 0,0328, — 0,0176 und — 0,0425. Hieraus erhielt ich durch graphische Interpolation die Wurzel $u = 7{,}58$.

8. Fügt man zu der in 7. beschriebenen Führung des belasteten Endes noch die Einklemmung des anderen Endes hinzu, so bestehen jetzt die Zwangskräfte der Führung in einer seitlichen Kraft, einem Torsionsmoment, und einem seitlichen Biegungsmoment, es ist also (vergleiche Seite 18) sowohl φ_0, wie auch y_0 und y_0'' von Null verschieden. Setzt man $y_0' = 0$, so kann man, wie sich leicht ergibt, folgende Beziehungen finden: $\varphi_0 = \varphi_l$; $y_0 = y_l$; $y_l' = 0$.

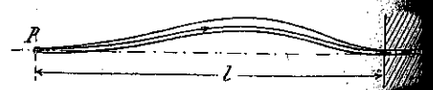


Abb. 12

Hieraus ergibt sich:

$$C(\varphi_l - \varphi_0) = C\varphi_0 \cdot (\mathsf{D} - 1) + Py_0 l \cdot \mathsf{G} + Pl^3 y_0'' \cdot \mathsf{K} = 0$$
$$Pl^2 y_l' = C\varphi_0 \cdot \mathsf{E} + Py_0 l\, \mathsf{H} + Pl^3 y_0''\, \mathsf{L} = 0$$
$$Pl(y_l - y_0) = C\varphi_0 \cdot \mathsf{F} + Py_0 l\,(\mathsf{J} - 1) + Pl^3 y_0''\, \mathsf{M} = 0$$

Diese 3 Gleichungen sind mit einander verträglich, wenn:

$$\begin{vmatrix} \mathsf{D} - 1 & \mathsf{G} & \mathsf{K} \\ \mathsf{E} & \mathsf{H} & \mathsf{L} \\ \mathsf{F} & \mathsf{J} - 1 & \mathsf{M} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Ausrechnung, geführt wie bei 7., ergab $u = 11{,}03$.

Aus den letzteren Beispielen zeigt sich, wie durch jeden weiteren Freiheitsgrad, der aufgehoben wird, immer wieder die Grenzlast hinaufgerückt wird. Aber, soviel man auch die Bewegungsfreiheit des Stabes einschränken mag, immer gibt es wieder eine Last, bei der von neuem Kipperscheinungen zutage treten.

9. Von den Fällen des am Ende belasteten Stabes bleibt noch die Beanspruchung durch ein Moment zu erledigen. Sind die Enden nur am Verdrehen gehindert, sonst aber frei, so ist in ihnen $\varphi = 0$, das Argument des Sinus in Gleichung (11) muss also für die Länge l um π anwachsen; also wird

$$\frac{Ml}{\sqrt{BC}} = \pi \quad \text{oder} \quad M = \frac{\pi}{l}\sqrt{BC}. \tag{23}$$

Sind die Enden eingeklemmt, so dass sie einander parallel bleiben müssen, so tritt dann noch ein Einspannmoment hinzu, das sich mit dem Hauptmoment zu einem etwas schiefliegenden resultierenden Momente vereinigt, in dessen Ebene die XZ-Ebene des Koordinatensystems gelegt werden muss.

Aus der Bedingung, dass an den Enden sowohl y' wie φ beiderseits denselben Wert haben muss, ergibt sich hier

$$M = \frac{2\pi}{l}\sqrt{BC}.$$

II. Der Stab mit einer Last in der Mitte.

Bei den Fällen mit zwei und mehr Zweigen wird die Rechnung bald sehr kompliziert; nur die Symmetrie kann noch eine übersichtliche Behandlung ermöglichen. Hier lassen sich, wie im vorigen Abschnitt, der durchaus nicht den Anspruch machen will, den Gegenstand erschöpft zu haben, geradesoviel Fälle aufführen, als muss ich mich hier auf die beschränken, die wichtige neue Verhältnisse kennen lehren.

1. Der Stab sei an beiden Enden gestützt und ausserdem dafür gesorgt, dass die Endquerschnitte jederzeit senkrecht stehen. Der Koordinatenursprung ist gemäss den ursprünglichen Festsetzungen an die Auflagerstelle zu verlegen. Die an den Enden auftretenden Torsionsmomente ergeben eine Verschiebung der Auflagerkräfte P um y_0 (siehe Abb. 13). Da die beiden so erhaltenen Auflagerresultierenden der Kraft $2P$ in der Mitte Gleichgewicht halten müssen, so müssen sie mit ihr in einer Ebene liegen; hieraus ergibt sich, dass y_0 gleich der Durchbiegung in der Mitte f ist. Nun ist y'_m (in der Mitte) $= 0$ wegen der Symmetrie. Ausserdem ist gemäss der obigen Bedingung $\varphi_0 = 0$; wie aus der Grundrissfigur hervorgeht, ist noch $y_m = 0$; man hat also

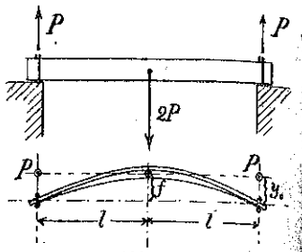


Abb. 13

$$y'_0\, l = -\, y_0\, \mathsf{H}$$

und

$$0 = y'_0\, l + y_0 \mathsf{J} = y_0(\mathsf{J} - \mathsf{H}).$$

Nach der Tafel wird $\mathsf{J} - \mathsf{H}$ zu Null für $u = 2{,}115$; für die Last in der Mitte ergibt sich, wenn l die halbe Spannweite bedeutet,

$$2\,P = \frac{4{,}23}{l^2}\sqrt{BC}. \tag{24}$$

Für die Gleichung der elastischen Linie findet man:

$$y = y_0\left(-\,\mathsf{H}_m \cdot \frac{x}{l} + \mathsf{J}\right).$$

Die Verdrehung der Mitte ergibt sich zu

$$\varphi_m = y_0 \frac{Pl}{C} \cdot \mathsf{G} = -\frac{y_0}{l} \cdot 0{,}790 \cdot 2{,}115 \sqrt{\frac{B}{C}} = -\,1{,}67 \sqrt{\frac{B}{C}} \cdot \frac{y_0}{l}.$$

2. Ist der Stab an beiden Enden durch starke horizontale Achsen gehalten, so dass y'_0 und φ_0 dauernd gleich Null sind, so hat man wegen des Einspannmoments hier die zu y''_0 gehörenden Funktionen mit zu berücksichtigen. In der Mitte ist, wie im vorigen Fall $y_m = 0$ und $y'_m = 0$. Letzteres liefert

$y_0\,\mathsf{H} + y''_0\, l^2 \mathsf{L} = 0$; letzteres dagegen:

$y_0\,\mathsf{J} + y''_0\, l^2 \mathsf{M} = 0$; hieraus die Verträglichkeitsbedingung

$$\mathsf{H} \cdot \mathsf{M} - \mathsf{J} \cdot \mathsf{L} = 0,$$

welche durch graphische Interpolation liefert: $\boldsymbol{u} = \mathbf{3{,}25}$.

3. Die Abweichungen nach Art der Nummer 3. im vorigen Abschnitt sind hier sehr mannigfaltig, da nicht nur bei der mittleren Kraft, sondern auch bei den Auflagerkräften eine Verlegung des Kraftangriffs ausgeführt werden kann. Hier soll nur der der Ziffer 4. entsprechende Kraftangriff besprochen werden, weil er ausser der dort behandelten Unstetigkeit noch eine zweite von anderer Natur aufweist.

Die Enden des Stabes seien befestigt wie in 1., die Kraft in der Mitte ausgeübt durch eine Schnur von der Länge e. Wie vorher ist wieder $y_m = 0$, $y'_m = 0$; φ_0 muss hier $= \frac{y_0}{e}$ gesetzt werden. Diese Gleichungen, wie früher verwertet, liefern

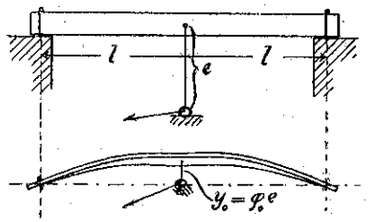


Abb. 14

$$\sqrt{\frac{C}{B}}\,(\mathsf{E} - \mathsf{F}) + \frac{e}{l}\,u\,(\mathsf{H} - \mathsf{J}) = 0. \tag{25}$$

Für sehr grosse Werte von e nähert sich u dem Werte 2,115, für sehr kleine dem Wert 6,97. Hier ist indessen zu beachten, dass ausser dieser Gestalt, die symmetrisch bezüglich der mittelsenkrechten Ebene des Stabes ist, noch eine zweite existiert, die Punktsymmetrie aufweist (Abb. 15). Diese besteht aus zwei Zweigen, von denen jeder mit dem unter I, 6 aufgeführten Fall sich deckt. u ist hier $= 5{,}56$. Diesem u entspricht in der Formel (25) $\frac{e}{l} = 0{,}186\sqrt{\frac{C}{B}}$. Nach dem Satz von der kleinsten positiven Wurzel ergibt sich also: Solange $\frac{e}{l} > 0{,}186\sqrt{\frac{C}{B}}$ ist, hat die Formel (25) Geltung, u schwankt zwischen 2,115 und 5,56, die Symmetrie ist eine Ebenensymmetrie; ist dagegen $\frac{e}{l} < 0{,}186\sqrt{\frac{C}{B}}$, so ist u unveränderlich $= 5{,}56$, und die Symmetrie ist eine Punktsymmetrie; wenn endlich $\frac{e}{l} = 0{,}186\sqrt{\frac{C}{B}}$ ist, so können je nach Gelegenheiten beide Symmetriearten entstehen.

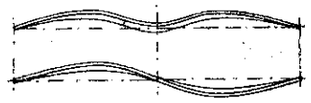


Abb 15

III. Allgemeiner Fall des Stabes mit mehreren Zweigen.

Von vornherein sei gegeben die ganze Konfiguration des Stabes und die Verhältnisse der Einzellasten. Dann ist es möglich, für jeden Zweig die resultierende Schubkraft sowohl der Lage nach, als auch im Verhältnis zu den gegebenen Lasten zu ermitteln. Am einfachsten geschieht dies mit Hilfe eines Seilpolygons, bei dem der Schnittpunkt der betreffenden Seilseite mit der Schlusslinie sofort die Lage der Schubkraft V angibt; deren Grösse ergibt sich aus dem Kräfteplan.

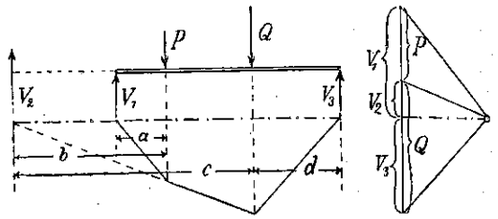


Abb. 16

Für das Biegungsmoment an der Stelle P ergibt sich aus Zweig 1: $M_{12} = V_1 \cdot a$; aus Zweig 2: $M_{12} = V_2 b$; infolgedessen erhält man für u_{1P} (Parameter des ersten Feldes an der Stelle von P)

$$u_{1P} = \frac{V_1 a^2}{\sqrt{BC}} = \frac{M_{12}\, a}{\sqrt{BC}}; \text{ ebenso für } u_{2P}: \quad u_{2P} = \frac{V_2 b^2}{\sqrt{BC}} = \frac{M_{12}\, b}{\sqrt{BC}};$$

also hat man die Proportion $u_{1P} : u_{2P} = a : b$;

ebenso ist $u_{2Q} : u_{3Q} = c : d$;

ausserdem findet man $u_{2Q} : u_{2P} = c^2 : b^2$;

hiemit lassen sich wie folgt, alle u durch u_{1P} ausdrücken:

$$u_{2Q} : u_{1P} = c^2 : ab$$

und

$$u_{3Q} : u_{1P} = cd : ab.$$

Nach diesen Vorarbeiten kann man an die Berechnung der Kipperscheinung gehen. Für jeden Zweig hat man die Werte von φ_0, y_0 und y_0'' zu ermitteln. Ausserdem sind noch Grössen nötig, welche die gegenseitige Lage der Koordinatensysteme der einzelnen Zweige feststellen; letzteres kann dadurch erreicht werden, dass man alle Koordinatensysteme auf das eines bestimmten Zweiges, etwa des ersten bezieht. Die Z-Koordinaten wurden bisher immer vernachlässigt; dasselbe kann mit gleichem Recht auch hier geschehen; die X-Koordinaten sind schon durch das Vorausgehende bestimmt. Es ist daher nur mehr anzugeben die Y-Koordinate des betr. Koordinaten-Ursprungs für das Bezugskoordinatensystem, Y_i, der Winkel der beiden Z-Achsen, Φ_i, und der Winkel zwischen beiden X-Achsen, Y_i'. Da übrigens y_0 für

die einzelnen Zweige seinerzeit unbestimmt blieb, kann man hier auch alle $Y' = 0$ setzen und die nötige Verdrehung des betreffenden Kurvenstücks durch sein y_0' ausdrücken.

Für n-Zweige hat man nach dem Vorausgehenden $3n$ charakteristische Grössen (φ_0 etc.) und $3\,(n-1)$ Beziehungen zwischen den Koordinatensystemen, zusammen also $6n-3$ Grössen zu bestimmen. Zur Bestimmung dieser Grössen stehen $6n-3$ Gleichungen zur Verfügung: Für jeden Zweig hat man 3 Aussagen, die im Prinzip drei Gleichgewichtsbedingungen darstellen, nämlich eine Komponentengleichung für die seitlichen Kräfte (φ_0), eine Momentengleichung für die Torsionsmomente (y_0) und eine für die seitlichen Biegungsmomente (y_0''). Für die Zweige an den Enden des Stabes erscheinen freilich diese Aussagen meist in anderer Form, indem es hier möglich ist, anstatt der Zwangskräfte gleich ihre Wirkungen (die oben in Klammern beigefügt sind), in die Formeln einzuführen.

Zu diesen $3n$ Gleichungen kommen noch $3\,(n-1)$ Uebergangsbedingungen, die dafür zu sorgen haben, dass an den Grenzen die Werte von y, y' und φ, auf das gemeinsame Hauptkoordinatensystem bezogen, stetig ineinander übergehen.

Im idealen Fall sind auch hier wieder die rechten Seiten der Gleichungen $= 0$; die Verträglichkeitsdeterminante ergibt im Zusammenhang mit den oben angeschriebenen Verhältnissen der u das Mittel zur Bestimmung der kritischen Belastung. Sind dagegen Abweichungen vorhanden, so ergibt sich für jede Belastung eine bestimmte elastische Linie, die dann für die kritische Belastung zu endlichen Ausbiegungen führt.

Ursprünglich hatte ich vor, auch hier einige Beispiele zu bringen, aber wegen des Umfanges der Schrift, der grösser ausfiel als ich erwartete, muss ich darauf verzichten.

Noch ein Wort über statisch unbestimmte Belastung, d. h. solche Belastung, bei der die Hauptbiegungsmomente nur unter Berücksichtigung der elastischen Formänderung ermittelt werden können. Ich habe alle derartigen Fälle in den Beispielen absichtlich vermieden. Da nämlich während des Auskippens auch die Z-Koordinate der elastischen Linie sich ändert, so steht zu erwarten, dass dadurch auch das statisch unbestimmte Moment geändert wird. Für den idealen Fall freilich kann sich die Kipp- [illegible] dadurch nicht ändern, da bis zu dieser Last y, φ u. s. w.

überhaupt gleich Null sind. Für den praktischen Fall dagegen, ist es bei den unvermeidlichen Abweichungen sehr wohl denkbar, dass der Einfluss des y und φ auf die Durchbiegung in der Z-Richtung, der in y und φ von der zweiten Ordnung ist, gegenüber z nicht vernachlässigt werden darf, besonders wenn z wegen eines sehr grossen E_1 sehr klein ausfällt. Jedenfalls müssten, um diese Frage zu entscheiden, diese Grössen zweiter Ordnung Berücksichtigung finden. Da die Frage jedoch anscheinend eine praktische Bedeutung nicht besitzt und jedenfalls sehr langwierige Rechnungen im Gefolge hätte, habe ich mich näher damit nicht beschäftigt.

II. Abschnitt.

Spezielle Verbesserungen u. Erweiterungen der Theorie.

Im bisherigen wurde die allgemeine Theorie der Kipperscheinungen in allen ihren hauptsächlichsten Zügen zur Darstellung gebracht. Im folgenden soll wiederum auf den einfachen Fall zurückgegriffen werden, bei dem ein Ende eingespannt und das andere frei ist, und speziell für diesen Fall sollen die Wirkungen einer Reihe von Einflüssen (Eigengewicht, Hauptbiegung und Schiefstellung des Stabes) studiert werden, deren Kenntnis teils für die Beurteilung der Versuchsergebnisse von Wichtigkeit, teils auch sonst von Interesse ist.

A. Einfluss des Eigengewichtes.

In allen bisherigen Rechnungen wurde das Eigengewicht der Stäbe vernachlässigt. Jetzt soll, wenigstens für den an einem Ende eingespannten Stab, der Einfluss desselben festgestellt werden. Die Annahme, dass die Ausschläge klein sind, muss natürlich auch hier festgehalten werden.

Zunächst handelt es sich jetzt darum, an Stelle der Gleichungen (3a) und (4) die den hier gestellten Forderungen entsprechenden zu setzen. Da der Stab, wie immer vorausgesetzt, prismatisch ist, ist das Eigengewicht gleichmässig auf die Länge verteilt und zwar soll die Längeneinheit des Stabes das Gewicht p haben.

Bedient man sich desselben Koordinatensystems wie in Abschnitt I, so wird der von der am Stabende konzentrierten Last stammende Teil des Biegungsmoments gleich $P \cdot x$, der vom

Eigengewicht herrührende ist gleich der Kraft px mal dem Hebelarm des Schwerpunktes $\frac{x}{2}$, also $= p\frac{x^2}{2}$. Die erweiterte Gleichung (3) lautet infolgedessen:

$$B_2 y'' = -\varphi\left(Px + \frac{px^2}{2}\right). \tag{26}$$

Nun das Torsionsmoment: Der von P stammende Anteil ist wie früher $= P(y - xy')$. Das Torsionsmoment des Eigengewichtes ist dargestellt durch das Produkt aus dem Gewichte $p \cdot x$ des Stückes links von dem betreffenden Querschnitt und dem Abstande des Schwerpunktes dieses Stückes von der Tangente an die Stabachse im Punkte x, y.

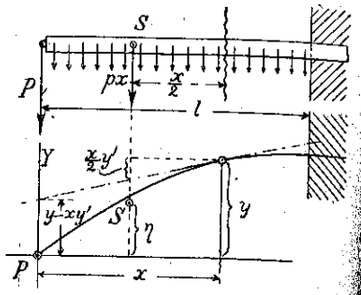


Abb. 17

Dieser Abstand ist gemäss Abb. 17 $= y - y' \cdot \frac{x}{2} - \eta$ $= y - y'\frac{x}{2} - \frac{1}{x}\int_0^x y\,dx$. (Dieser letztere Wert wird durch Vereinfachung gewonnen aus $\int y ds = \eta \int ds$).

Das Torsionsmoment kann nun angeschrieben werden:

$$P(y - xy') + p\left(xy - \frac{x^2}{2}y' - \int_0^x y dx\right).$$

Hiemit erhält man statt Gleichung (4):

$$C\varphi' = P(xy' - y) + p\left(\int_0^x y dx - xy + \frac{x^2 y'}{2}\right). \tag{27}$$

Durch Differenzieren nach x ergibt sich hieraus:

$$C\varphi'' = \left(Px + p\frac{x^2}{2}\right) \cdot y''. \tag{28}$$

Führt man hier noch den Wert von y'' aus Gleichung (26) ein, so gelangt man zur Differentialgleichung des Problems:

$$\boldsymbol{B_2 C\varphi'' = -\left(Px + \tfrac{1}{2}px^2\right)^2 \cdot \varphi}. \tag{29}$$

Die hier zum Quadrat erhobene Grösse ist nichts anderes als das Biegungsmoment an der Stelle x, wie aus der Ableitung von Gleichung (26) ersichtlich ist; bezeichnet man dieses Biegungsmoment mit M, so kann man schreiben

$$\boldsymbol{B_2 C\varphi'' = -M^2\varphi}, \tag{29a}$$

eine Gleichung, die äusserlich mit Gleichung (6b) übereinstimmt; während indes dort M konstant ist, ist es hier eine Funktion von x.

Nun lässt sich zeigen, dass die Gleichung (29a) auch dann noch Giltigkeit hat, wenn die Belastung pro Längeneinheit p eine ganz willkürliche Funktion von x ist; Bedingung ist dabei nur, dass wie bisher der Stabquerschnitt konstant sei, ferner, dass die Kräfte sämtlich in der Stabachse angreifen und unter sich parallel sind.

Wegen dieser umfassenden Bedeutung könnte man Gleichung (29) geradezu als die Grundgleichung der Kipperscheinungen bezeichnen, da die bisherigen Fälle sämtlich in ihr enthalten sind. Leider ist es mir, da ich diese Beziehung erst während der Ausarbeitung der Reinschrift auffand, nicht mehr möglich, sie an die Stelle zu rücken, wohin sie wegen ihrer Bedeutung gehört. An den Ergebnissen der Arbeit freilich ändert die neue Beziehung nichts, da sich bei weniger einfachen Funktionen für M die Rechnungsschwierigkeiten so sehr mehren, dass eine Bearbeitung bald aussichtslos wird. — Ich bin noch den Beweis schuldig für die Behauptung der allgemeinen Giltigkeit von Gleichung (29a). Man kann verfahren wie oben. Zunächst ergibt sich aus Gleichung (3): $B_2 y'' = -M\varphi$. In dem Ausdruck für das Torsionsmoment muss, wenn p eine beliebige Funktion ist, statt px $\int p dx$ eingeführt werden; der Schwerpunktsabstand von der Y-Achse ist nicht mehr $\frac{x}{2}$, sondern $\xi = \frac{\int x\,p dx}{\int p dx}$, der von der X-Achse $\eta = \frac{\int y\,p dx}{\int p dx}$; führt man in dem Ausdrucke $\int p dx\left(y - (x - \xi)\,y' - \eta\right)$, der das Torsionsmoment darstellt, diese Grössen ein und differenziert, so vereinfacht sich das Erhaltene zu $y''\left(\int x\,p dx - x\int p dx\right)$. Beachtet man, dass $p = \frac{d^2M}{dx^2}$ ist (siehe Föppl, Festigkeitslehre S. 241), so ergibt dieser Ausdruck, der nach dem früheren auch $= -C\varphi''$ ist, den Wert $y''\left(\int x\frac{d^2M}{dx^2}dx - x\frac{dM}{dx}\right)$ oder nach einer partiellen Integration $\varphi'' = y''M$, was mit der obenstehenden Gleichung kombiniert die Gleichung 29a liefert.

Im allgemeinsten Falle ist auch noch in der XY-Ebene eine Belastung vorhanden, welche ein Biegungsmoment M_2 liefert — das bisher mit M bezeichnete Moment in der XZ-Ebene möge

jetzt M_1 heissen —, ausserdem sei durch beliebig excentrischen Angriff der Kräfte ein Torsionsmoment M_3 ausser dem erst während des Kippens entstehenden vorhanden. Lässt man endlich auch die Bedingung des konstanten Querschnitts fallen, so dass also nicht nur M_1, M_2 und M_3, sondern auch B_1, B_2 und C beliebige Funktionen von x sind, so erhält man auf dem gleichen Weg wie oben die Gleichungen $B_2 y_0' = -M_1 \varphi - M_2$ und

$$C\varphi' = -\left(M_1'(y - xy') + y' \int M_1'' x\,dx - \int M_1'' y\,dx\right) + M_3;$$

letztere Gleichung liefert durch Differenzieren:

$$C\varphi'' + C'\varphi' = y'' M_1 + M_3'.$$

Durch Kombination mit der ersten Gleichung ergibt sich hieraus die allgemeinste Differentialgleichung der Kipperscheinungen, wie folgt:

$$B_2 (C\varphi'' + C'\varphi' - M_3') + M_1^2 \varphi + M_1 M_2 = 0.$$

Zu dem speziellen Problem zurückkehrend schreibe ich Gleichung (29) in etwas veränderter Form nochmal an:

$$B_2 C\varphi'' = -\left(P^2 x^2 + Pp x^3 + \frac{p^2 x^4}{4}\right) \varphi.$$

Entwickelt man die Lösung in eine Potenzreihe, so ergibt sich für die Koefficienten die Rekursionsformel:

$$A_n = -\frac{P^2 A_{n-4} + Pp A_{n-5} + \frac{1}{4} p^2 A_{n-6}}{n(n-1)\,BC} \tag{30}$$

Die Lösung der Gleichung (29) muss zwei willkürliche Konstanten haben. Als diese können A_0 und A_1 angesehen werden. Setzt man nun gemäss den speziellen Voraussetzungen des Problems $y_0 = 0$, so ist aus Gleichung (27) ersichtlich, dass auch $\varphi_0' = 0$ sein muss; also ist $A_1 = 0$ und nur $A_0 = \varphi_0$ noch vorhanden.

Ist der Stab ganz allein der Einwirkung seines Eigengewichtes oder einer anderweitig gleichförmig verteilten Belastung unterworfen, so ist in den Formeln $P = 0$ zu setzen. Gleichung (30) reduziert sich dann zu

$$A_n = -\frac{p^2 A_{n-6}}{4n(n-1)BC} = -\frac{K A_{n-6}}{n(n-1)}, \text{ wenn } \frac{p^2}{4BC} = K \text{ gesetzt wird.}$$

hiemit wird

$$\varphi = \varphi_0 \left(1 - \frac{x^6 K}{6 \cdot 5} + \frac{x^{12} K^2}{12 \cdot 11 \cdot 6 \cdot 5} - \frac{x^{18} K^3}{18 \cdot 17 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 6 \cdot 5} + \cdots\right)$$

Diese spezielle Lösung für $P = 0$ ist wieder eine Besselsche Funktion, und zwar ist die in der Klammer befindliche Reihe identisch mit

$$\left(\frac{\sqrt{K}}{6}\right)^{\frac{1}{6}} \Gamma\left(\tfrac{5}{6}\right) \cdot \sqrt{x}\, \mathcal{J}^{-\frac{1}{6}}\left(\frac{x^3}{3}\sqrt{K}\right).$$

Ist das befestigte Ende des Stabes so eingespannt, dass die grosse Querschnittshauptachse in die Richtung der Schwerkraft zu liegen kommt, so ist hier (für $x = l$) $\varphi = 0$ zu setzen. Bezeichnet man noch die Grösse $l^6 M = \frac{l^6 p^2}{4BC}$, welche dimensionslos ist, mit w, so hat man:

$$0 = 1 - \frac{w}{6 \cdot 5} + \frac{w^2}{12 \cdot 11 \cdot 6 \cdot 5} - \frac{w^3}{18 \cdot 17 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 6 \cdot 5} + \cdots$$

Die kleinste Wurzel dieser Gleichung ist $w = 41{,}3$.

Die Länge also, bei welcher ein Stab von gegebenem Profil durch sein Eigengewicht umkippt, ergibt sich aus $\frac{l^6 p^2}{4BC} = 41{,}3$

$$l = 2{,}345 \sqrt[6]{\frac{BC}{p^2}} \tag{31}$$

Die zweite Aufgabe, die hier gelöst werden soll, ist die, eine brauchbare Formel für den Einfluss des Eigengewichtes auf die Grösse der Kipplast zu gewinnen für den Fall, dass dieses Eigengewicht nur einen Bruchteil der beobachteten Last ausmacht. Zunächst muss die Reihe für φ, die aus der Rekursionsformel (30) hervorgeht, in eine für diesen Zweck passende Form gebracht werden. Wie vorher, so muss auch hier für $x = l$ $\varphi = 0$ werden, also

$$\varphi = \varphi_0 \left(1 - \frac{l^4 P^2}{BC}\left(\frac{1}{4 \cdot 3} + \frac{pl}{P \cdot 5 \cdot 4} + \frac{p^2 l^2}{P^2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}\right)\right.$$

$$\left(\frac{l^4 P^2}{BC}\right)^2 \left(\frac{1}{8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3} + \frac{pl}{P \cdot 9 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} + \frac{p^2 l^2 \cdot 19}{P^2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5} + \cdots\right)$$

$$\left(\frac{l^4 P^2}{BC}\right)^3 \left(\frac{1}{12 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3} + \frac{pl \cdot 101}{P \cdot 13 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} + \cdots\right)$$

$$\left(\frac{l^4 P^2}{BC}\right)^4 \left(\frac{1}{16 \cdot 15 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3} + \cdots\cdots\cdots\cdots\right)$$

Die Grösse pl ist nichts anderes als das Gewicht G des Stabes. Setzt man das Verhältnis $G : P = \delta$, ferner noch wie wie früher $\frac{l^4 P^2}{BC} = u^2$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 = 1 &- u^2 \,(0{,}08333 + 0{,}05\,\delta + 0{,}008333\,\delta^2) \\ &+ u^4\,(0{,}0014881 + 0{,}001852\,\delta + \cdots\cdots \delta^4) \\ &- u^6\,(\cdots\cdots\cdots) + u^8\,(\cdots\cdots\cdots) - \cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Diese Gleichung gestattet für beliebige Werte von δ das zugehörige u zu finden. Ich habe die Rechnung durchgeführt für $\delta = 0{,}05$, 0,1, 0,2 und 0,3. Bei höheren Werten von δ konvergieren die gerechneten Werte nicht mehr genügend, weshalb von einer Berechnung der entsprechenden u Abstand genommen wurde. Das in den Formeln vorkommende P (die Last, welche zur Wirkung des Eigengewichtes noch hinzutreten muss, um den Stab zum Kippen zu bringen) ist, wie der Fall gewöhnlich liegt, die gesuchte Grösse, es ist daher auch $\delta = {}^G/_P$ von vornherein nicht bekannt. Ich führe daher eine andere Grösse $\delta_1 = {}^G/_{P_0}$ ein, wobei P_0 die ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes sich ergebende Kipplast bedeutet. Da $P : P_0 = u : u_0$ ist, ergibt sich

$$\delta_1 = \delta \cdot \frac{P}{P_0} = \delta \cdot \frac{u}{u_0}.$$

In der folgenden Tabelle sind die gerechneten Werte von δ, u und δ_1 zusammengestellt:

$\delta = 0$	$u = 4{,}013$	$\delta_1 = 0{,}00$
0,05	3,955	0,049
0,1	3,90	0,097
0,2	3,795	0,189
0,3	3,695	0,276

Nun wurden die zugehörigen Werte von u und δ_1 als Ordinaten und Abszissen auf Millimeterpapier aufgetragen. Die Zeichnung ergab, dass die Punkte in dem berechneten Bereich sehr genau auf einer Geraden liegen, so genau, dass ich nicht entscheiden konnte, ob die Kurve konkav oder konvex gekrümmt ist.

Aus der Neigung der Geraden ergab sich die Formel

$$u = 4{,}013 - 1{,}15\,\delta_1.$$

Für die Kipplast ergibt sich hieraus:

$$P = P_0\left(1 - \frac{1{,}15}{4{,}013}\,\delta_1\right) = P_0 - 0{,}287\,G \qquad (32)$$

Diese Gleichung gilt mit Sicherheit bis $\delta_1 \leq 0{,}3$.

Dass sie auch darüber hinaus nicht allzuviel falsch sein kann, zeigt noch folgendes: Löst man die für die alleinige Einwirkung des Eigengewichtes gewonnene Formel nach $pl = G$ auf, so ergibt sich $G = \frac{12{,}85}{l^2}\sqrt{BC}$. Dem Werte $P = 0$, der diesem Fall entspricht, ist demnach $\delta_1 = \frac{12{,}85}{4{,}013} = 3{,}20$ zugeordnet. Der Stab kann also, wie sich hieraus ergibt, mehr als dreimal so viel tragen, bevor er umkippt, wenn die Last gleichförmig über die ganze Länge verteilt ist, als wenn sie am Ende angreift.

Die Formel (32) gibt nun für $\delta_1 = 3{,}2$ $P = 0{,}082\,P_1$ statt $P = 0$, also bei mehr als dem zehnfachen des berechneten Bereiches ist ca. 8% Abweichung.

Schreibt man statt der Gleichung (32) die folgende:

$$P = P_0 - 0{,}287\,G - 0{,}008\,\frac{G^2}{P_0}, \qquad (32a)$$

so ist der Punkt $P = 0$ richtig mit enthalten. Nach meiner Schätzung dürfte dann P in dem ganzen Bereiche nirgends mehr als ein paar Prozente von dem berechneten Werte abweichen.

B. Einfluss der Hauptbiegung.

Bisher wurde immer angenommen, dass die Biegungssteifigkeit in der Richtung der grossen Querschnittshauptachse, B_1, so gross gegenüber B_2, dass die Biegung in der Z-Richtung sehr klein erhält und so keine merkliche Einwirkung auf die Grösse der Kipplast hervorbringt. Für die in der Technik geforderte Genauigkeit würde die einfache Formel immer ausreichen, da bei Stäben, bei denen B_1 und B_2 nicht sehr verschieden sind, wenigstens von die technischen Konstruktionsmaterialien in Betracht kommen, schon noch vor dem Kippen die zulässigen Festigkeitsgrenzen überschritten werden. Handelt es sich aber darum, die Versuchsergebnisse mit denen der Rechnung zu vergleichen, so darf man skizzieren erwarten, dass sie so genau als irgend möglich sind.

Als Koordinatensystem sei wieder festgesetzt: Z-Achse = Richtung der Kraft, X-Achse senkrecht dazu parallel der ursprünglichen Kraft-Stab-Ebene, Y-Achse senkrecht zu den beiden andern.

Für die Hauptbiegung vor dem Auskippen findet man nach Gleichung (1) $B_1 z'' = -Px$; hieraus

$$z' = z'_0 - \frac{Px^2}{2B_1}. \tag{33}$$

z'_0 ist dabei analog den früheren Bezeichnungen die Neigung der elastischen Linie im Anfangsquerschnitt. Die Gleichung (33) ist natürlich nur solange giltig, als die Grössen der zweiten Ordnung vernachlässigt werden können. Wegen der Grösse von B_1 ist dies übrigens praktisch immer der Fall.

Zerlegt man nun P in zwei Komponenten, wovon die eine der Richtung der Tangente an den Punkt x, y, z der elastischen Linie (siehe Abb. 18) parallel ist, die andere dagegen in der dazu senkrechten Ebene liegt, so liefert die erste Komponente, welche die Grösse $P \cdot z'$ hat, ein seitliches Biegungsmoment $Pz'(y - xy')$. Die andere Komponente, die unter Vernachlässigung der kleinen Grössen zweiter Ordnung gleich P ist, trägt zur seitlichen Krümmung nach Gleichung (3) bei: $y''_2 = -Px\psi \frac{B_1 - B_2}{B_1 \cdot B_2}$ (hier muss auf diesen ausführlicheren Ausdruck zurückgegriffen werden).

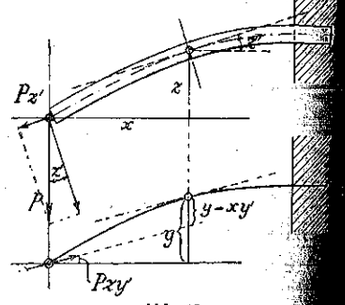


Abb. 18

ψ bedeutet den Winkel zwischen der grossen Querschnittshauptachse im Punkte x, y, z und der letzteren Komponente von P. Unter Vernachlässigung der zweiten Ordnung kann dieser Winkel gleich der Differenz zwischen dem Winkel φ und dem Winkel gesetzt werden, den die genannte Komponente mit der XZ-Ebene bildet; dieser ist aber, wie aus der Figur zu entnehmen ist, $= z'y'$.

Nun wird also:

$$y'' = \frac{Pz'}{B_2}(y - xy') - Px\frac{B_1 - B_2}{B_1 B_2}(\varphi - z'y'),$$

oder wenn man $\frac{z'B_2}{B_1}$ als klein von der zweiten Ordnung streicht:

$$y'' = \frac{P}{B_2}(z'y - x\varphi\frac{B_1 - B_2}{B_1}.$$

Dieses Ergebnis hätte man auch sofort erhalten können, wenn man P nicht wie angegeben, sondern in der XZ-Ebene zerlegt hätte. Aber es wäre dann nicht von vornherein klar gewesen, ob nicht dabei eine unzulässige Vernachlässigung untergelaufen wäre. —

Nun wird der Wert von z' aus (33) eingetragen, man erhält:

$$y'' = \frac{Pz'_0}{B_2}y - \frac{P^2x^2}{2B_1B_2}y - \frac{P\cdot(B_1 - B_2)}{B_1B_2}x\varphi.$$

Bezeichnet man jetzt zur Abkürzung die Konstanten

$$\frac{Pz'_0}{B_2} = L, \quad \frac{P^2}{2B_1B_2} = M \quad \text{und} \quad \frac{P^2(B_1 - B_2)}{CB_1B_2} = N,$$

so erhält die Gleichung folgende Gestalt:

$$y'' = Ly - Mx^2y - N\frac{C}{P}x\varphi. \tag{34}$$

Zu dieser Gleichung tritt hinzu die Gleichung (4), welche unverändert Geltung hat:

$$C\varphi' = P(xy' - y).$$

Hier ist die Auflösung nach y die einfachere. Zu diesem Zweck wird Gleichung (34) einmal differenziert. Man erhält:

$$y''' = Ly' - M(x^2y' + 2xy) - \frac{NC}{P}(x\varphi' - \varphi).$$

Trägt man noch die Werte von φ und φ' aus Gleichung (34) und (4) ein, so ergibt sich nach Ordnung der Glieder die Differentialgleichung des Problems:

$$y''' - L(xy' - y) + M(x^3y' + x^2y) + N(x^3y' - x^2y) = 0. \tag{35}$$

Für die Auflösung dieser Gleichung durch Potenzreihen findet man hieraus die Rekursionsformel:

$$\frac{1}{n(n-1)(n-3)}\left((n-3)LA_{(n-2)} - (n-3)MA_{(n-4)} - (n-5)NA_{(n-4)}\right).$$

Auch hier sei gleich von Anfang an $y_0 = 0$ gesetzt; dann muss auch $y''_0 = 0$ gesetzt werden, wie aus Gleichung (34) hervorgeht. Als willkürliche Konstanten sind jetzt noch vorhanden (wie man sich durch Einsetzen überzeugen kann):

$$y'_0 = A_1 \quad \text{und} \quad y'''_0 = 6A_3.$$

Schon weil Gleichung (33) nur bis auf die erste Ordnung richtig ist, kann es sich hier nur darum handeln, den Einfluss erster Ordnung festzustellen, der von der Hauptkrümmung ausgeübt wird. Deshalb werden in den folgenden Potenzreihen die Grössen L und M, die gegenüber N von der Grössenordnung der z' sind, immer vernachlässigt, wenn sie quadratisch oder in höheren Potenzen vorkommen. Mit dieser Vereinfachung erhält man:

$$y = y_0' x + y_0' M \left(-\frac{x^5}{5\cdot 4} + \frac{x^9 N}{9\cdot 8\cdot 6\cdot 5} - \frac{x^{13} N^2}{13\cdot 12\cdot 10\cdot 9\cdot 6\cdot 5} + \cdots\right)$$

$$+ y_0''' \left\{ \left(\frac{x^3}{3\cdot 2} - \frac{x^7 N}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3} + \frac{x^{11}}{11\cdot 10\cdot 8\cdot 7\cdot 4\cdot 3} - \cdots\cdots\right)\right.$$

$$+ L\left(\frac{x^5}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} - \frac{19\, x^9 N}{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3} + \frac{1942\, x^{13} N^2}{15\cdot 14\cdot 12\cdot 11\cdot 8\cdot 7\cdot 4\cdot 3} - \cdots\right)$$

$$\left. + M\left(-\frac{x^7}{7\cdot 6\cdot 3\cdot 2} + \frac{x^{12} N}{11\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 3\cdot 2} - \frac{272\, x^{15} N^2}{15\cdot 14\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3} + \cdots\right)\right\}$$

Hieraus ist y' und dann φ zu rechnen, letzteres mit Hilfe von Gleichung (4). — Setzt man vorübergehend $y = A_n x^n$, so wird hienach

$$C\varphi' = P(n-1)\, A_n x^n \quad \text{und} \quad C\varphi = P\frac{n-1}{n+1}\, A_n x^{n+1}.$$

Mit Hilfe dieser Formel kann φ einfach angeschrieben werden:

$$\frac{C}{P}\varphi = \frac{C}{P}\varphi_0 + y_0' M\left(-\frac{x^6}{6\cdot 5} + \frac{x^{10}}{10\cdot 9\cdot 6\cdot 5} - \cdots\right)$$

$$+ y_0'''\left\{\left(\frac{x^4}{4\cdot 3} - \frac{x^8 N}{8\cdot 7\cdot 4\cdot 3} - \cdots\right) + L(\cdots) + M(\cdots)\right\}$$

Setzt man die so erhaltenen Werte in Gleichung (34) ein, so tritt Identität ein, wenn noch die Beziehung besteht:

$$y_0''' - y_0' L + \frac{\varphi_0 C}{F} N = 0. \qquad (36)$$

Die Grenzbedingungen bestehen darin, dass für $x = l$ φ und y' zu Null werden müssen.

Zur einfacheren Berechnung der Reihen sei die Grösse A, die früher mit u^2 bezeichnet wurde, jetzt mit w bezeichnet.

Dann wird $\frac{NC}{P}\varphi_l = 0 =$

$$\frac{NC}{P}\varphi_0 + y_0' l^2 M\left(-\frac{w}{6\cdot 5} + \frac{w^2}{10\cdot 9\cdot 6\cdot 5} - \frac{w^3}{14\cdot 13\cdot 10\cdot 9\cdot 6\cdot 5} + \cdots\right)$$

$$+ y_0'''\left\{\left(\frac{w}{4\cdot 3} - \frac{w}{8\cdot 7\cdot 4\cdot 3} + \frac{w^3}{12\cdot 11\cdot 8\cdot 7\cdot 4\cdot 3} - \cdots\cdots\right)\right.$$

$$+ Ll^2\left(\frac{w}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2} - \frac{19\, w^2}{10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3} + \cdots\cdots\cdots\right)$$

$$\left. + \frac{M}{N}\left(-\frac{w^2}{8\cdot 7\cdot 3\cdot 2} + \frac{10\, w^3}{12\cdot 11\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 3\cdot 2} - \cdots\cdots\cdots\right)\right\}$$

$$Nl^2 y_l' = l^2 y_0' N + l^2 y_0' M\left(-\frac{w}{4} + \frac{w^2}{8\cdot 6\cdot 5} - \frac{w^3}{12\cdot 10\cdot 9\cdot 6\cdot 5} + \cdots\right)$$

$$+ y_0'''\left\{\left(\frac{w}{2} - \frac{w^2}{6\cdot 4\cdot 3} + \frac{w^2}{10\cdot 8\cdot 7\cdot 4\cdot 3} - \cdots\right)\right.$$

$$+ Ll^2\left(\frac{w}{4\cdot 3\cdot 2} - \frac{19\, w^2}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3} + \cdots\cdots\right)$$

$$\left. + \frac{M}{N}\left(-\frac{w^2}{6\cdot 3\cdot 2} + \frac{w^3}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 3\cdot 2} - \cdots\cdots\right)\right\}$$

Führt man jetzt, wie früher, für die Reihen Buchstabenbezeichnungen ein, die wieder durch Groteskschrift kenntlich gemacht sind, so erhält man für die aufgeführten Gleichungen folgende Form:

$$0 = \frac{NC}{P}\varphi_0 + y_0' l^2 M\cdot \mathsf{F} + y_0'''\left(\mathsf{G} + Ll^2\,\mathsf{H} + \frac{M}{N}\mathsf{J}\right) \qquad (35)$$

$$0 = y_0' l^2\left(N + M\cdot \mathsf{Q}\right) + y_0'''\left(\mathsf{R} + Ll^2\,\mathsf{S} + \frac{M}{N}\mathsf{T}\right) \qquad (36)$$

Zieht man von der ersten dieser Gleichungen die Gleichung (36) ab, so ergibt sich

$$0 = y_0' l^2\left(M\mathsf{F} + \frac{L}{l^2}\right) + y_0'''\left(\mathsf{G} + Ll^2\mathsf{H} + \frac{M}{N}\mathsf{J} - 1\right)$$

Diese Gleichung muss mit der zweiten der obigen verträglich sein, also muss sein:

$$\left(M\mathsf{F} + \frac{L}{l^2}\right)\left(\mathsf{R} + Ll^2\mathsf{S} + \frac{M}{N}\mathsf{T}\right) = \left(N + M\mathsf{Q}\right)\left(\mathsf{G} + Ll^2\mathsf{H} + \frac{M}{N}\mathsf{J} - 1\right)$$

Durch Ausmultiplizieren und Fortlassen der Glieder mit L^2, LM und M^2 erhält man unter Berücksichtigung, dass $l^4 N = w$ ist,

$$l^2 L\,(\mathsf{R} - w\,\mathsf{H}) + l^4 M\,(\mathsf{FR} - \mathsf{Q}\,(\mathsf{G} - 1) - \mathsf{J}) = w\,(\mathsf{G} - 1) \qquad (37)$$

Da es sich nur um die Korrektionen der ersten Ordnung handelt, kann hier $w = w_0 + L\,\frac{dw_0}{dL} + M\,\frac{dw_0}{dM}$ gesetzt werden. $w_0 = 4{,}0126^2 = 16{,}101$ ist der Wert, den w für $L = 0$ und $M = 0$ annimmt, eben der Wert nach der einfachen Formel (16).

Differenziert man jetzt Gleichung (37) nach L und lässt gleich alle Glieder mit L und M fort, so wird

$$l^2\,(\mathsf{R} - w\,\mathsf{H}) = \frac{d}{dw}\left(w\,(\mathsf{G} - 1)\right)\frac{dw}{dL};$$

hieraus folgt:
$$\frac{dw}{dL} = \frac{l^2\,(\mathsf{R} - w\,\mathsf{H})}{\frac{d}{dw}\,(w\,\mathsf{G}) - 1};$$

ebenso wird:
$$\frac{dw}{dM} = \frac{l^4\left(\mathsf{FR} - \mathsf{Q}\,(\mathsf{G} - 1) - \mathsf{J}\right)}{\frac{d}{dw}\,(w\,\mathsf{G}) - 1}.$$

Nun ist $w = 16{,}1$, F berechnet sich zu $-0{,}449$, $\mathsf{G} - 1$ ist gerade das Negative der im ersten Abschnitt mit D bezeichneten Funktion, es ist also hier $= 0$, weshalb sein Faktor Q nicht erst gerechnet zu werden braucht; J ist $= 0{,}627$; $\mathsf{H} = 0{,}0698$, hiemit $w\,\mathsf{H} = 1{,}125$; R ist das Negative des früheren E, es wird hier $= 5{,}020$; endlich ist $\frac{d}{dw}\,(w\,\mathsf{G}) - 1 =$

$$-1 + \frac{2\,w}{4\cdot 3} - \frac{3\,w^2}{8\cdot 7\cdot 4\cdot 3} + \frac{4\,w^3}{12\cdot 11\cdot 8\cdot 7\cdot 4\cdot 3} - \cdots = 0{,}698.$$

Mit diesen Zahlen wird nun

$$\frac{dw}{dL} = 5{,}58\,l^2 \quad \text{und} \quad \frac{dw}{dM} = -\,2{,}33\,l^4;$$

hiemit wird $\quad w = 16{,}10 - 2{,}33\,Ml^4 + 5{,}58\,Ll^2$

oder $$\frac{l^4 P^2\,(B_1 - B_2)}{C\,B_1 B_2} = 16{,}10 - 2{,}33\,\frac{P^2 l^4}{2\,B_1 B_2} + 5{,}58\,\frac{z_0'\,Pl^2}{B_2}.$$

Bezeichnet man nunmehr die Neigung des eingespannten Querschnitts (nach aufwärts positiv) mit α, so wird, da nach Gleichung (33) $\alpha = -\,z_l' = -\,z_0' + \frac{Pl^2}{2\,B_1}$ ist,

$$\frac{l^4 P^2\,(B_1 - B_2)}{C\,B_1 B_2} = 16{,}10 + 3{,}25\,\frac{P^2 l^4}{2\,B_1 B_2} - 5{,}58\,\alpha\,\frac{Pl^2}{B_2}.$$

Da die Entwicklung nur die Grössen erster Ordnung berücksichtigt, kann in den Korrektionsgliedern für P jetzt auch $P_0 = \frac{4{,}013}{l^2}\sqrt{B_2 C}$ eingeführt werden. Nun kann die Gleichung nach P aufgelöst werden. Zieht man noch auf der rechten Seite die Wurzel nach dem binomischen Satze aus, so wird die Endformel erhalten:

$$P = \frac{4{,}0126}{l^2}\sqrt{B_2 C}\,\left(1 + \frac{B_2}{2\,B_1} + 0{,}813\,\frac{C}{B_1} - 0{,}696\,\alpha\sqrt{\frac{C}{B_2}}\right). \qquad (38)$$

Bei den Versuchen kann man α so wählen, dass die beiden letzten Glieder sich wegheben, so dass also P gerade der Formel $P_0 = \frac{4{,}0126}{l^2}\sqrt{\frac{B_1 B_2 C}{B_1 - B^2}}$ entspricht.

Nach einer einfachen Rechnung, die ich hier aber der Kürze halber übergehe, ist dies der Fall, wenn bei 0,877 der Kipplast die Senkung des Endes gerade so gross wird, dass Anfang und Ende des Stabes sich in gleicher Höhe befinden.

Als Anhang an die vorausgehende Abhandlung schliesst sich passend eine

Berechnung der Formeln für den Rechteckquerschnitt

Der Rechteckquerschnitt ist nämlich von den Querschnitten mit sehr verschiedenem B_1 und B_2 der einzige, der praktisch in Anwendung kommt und für den gleichzeitig auch Formeln über B_1, B_2 und C vorliegen. Die zu findenden Formeln sollen dazu dienen, für einen Stab von bekannten Dimensionen und Elastizitätskonstanten die Kipplast ohne weiteres zu berechnen.

Ist h die Höhe und b die Breite des Rechtecks, ferner E Young'sche Elastizitätsmodul, F der Schubmodul und m die

Poisson'sche Konstante (Verhältnis der Längendehnung zur Querverkürzung beim Zug), so ist bekanntlich

$$B_1 = \frac{Ebh^3}{12} \quad \text{und} \quad B_2 = \frac{Eb^3h}{12}.$$

C wird nach der Formel von de Saint-Venant*)

$$= Fb^3 \left(\frac{h}{3} - \frac{64}{\pi^5}\, b \cdot \sum_0^\infty \frac{\mathfrak{Tg}\left((2n+1)\frac{\pi h}{2b}\right)}{(2n+1)^5}\right).$$

Wenn h einigermassen gross gegen b ist, dann ist jede dieser $\mathfrak{Tg}$ (hyperbolische Tangente) gleich der Einheit (der Fehler beträgt bei $h = 3b$ nicht ganz 2 %, bei $h = 5b$ schon weniger als 1 ‰). Dann wird

$$C = Fb^3 \left(\frac{h}{3} - \frac{64}{\pi^5}\, b \sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^5}\right),$$

oder nach Ausrechnung der Zahlenwerte:

$$C = \frac{1}{3}\, Fb^3h \left(1 - 0{,}63024\, \frac{b}{h}\right).$$

Der Ausdruck $\sqrt{B_2C}$ kann somit geschrieben werden:

$$\sqrt{B_2C} = \frac{Eb^3h}{6} \sqrt{\frac{F}{E}\left(1 - 0{,}63\, \frac{b}{h}\right)},$$

oder da nach einer bekannten Formel**) $F = \frac{mE}{2(m+1)}$ ist,

$$\sqrt{B_2C} = \frac{Eb^3h}{12} \sqrt{\frac{2m}{m+1}\left(1 - 0{,}63\, \frac{b}{h}\right)}.$$

Die Grösse $\sqrt{\frac{C}{B_2}}$ wird $= \sqrt{\frac{2m}{m+1}\left(1 - 0{,}63\frac{b}{h}\right)}$.

Nun wird für den einfachen Fall, dass das eine Ende des Stabes eingespannt, das andere, belastete frei ist, genau bis auf Grössen erster Ordnung $\left(\frac{b}{h}\right)$:

$$P = \frac{4{,}01}{l^2}\, \frac{Eb^3h}{12} \sqrt{\frac{2m}{m+1}\left(1 - 0{,}63\, \frac{b}{h}\right)},$$

*) Love I, Seite 168.
**) Föppl, Festigkeitslehre Seite 62.

oder, wenn, wie gewöhnlich angenommen, $m = 3\frac{1}{3}$ gesetzt wird:

$$P = 0{,}415\, \frac{Eb^3h}{l^2} \left(1 - 0{,}315\, \frac{b}{h}\right) \tag{39}$$

Will man die zweite Potenz von $\frac{b}{h}$ noch berücksichtigen, so ergibt sich unter Beachtung, dass $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \cdots$ ist, aus Formel (38):

$$P = 0{,}3344\, \frac{Eb^3h}{l^2} \sqrt{\frac{2m}{m+1}} \left\{1 - 0{,}3151\, \frac{b}{h} + \left(0{,}421 + 0{,}813\, \frac{2m}{m+1}\right)\left(\frac{b}{h}\right)^2 - 0{,}696\, \alpha \sqrt{\frac{2m}{m+1}}\right\}. \tag{39a}$$

Bezeichnet γ das Gewicht der Volumeinheit (spezifisches Gewicht), so ist das Gewicht $G = \gamma \cdot bhl$; aus der obigen gerechneten Last findet sich dann die beobachtete:

$$P_{beob.} = P_0 - 0{,}287\, G.$$

Für die Länge des Stabes, der durch sein Eigengewicht umkippt, ergibt sich nach Formel (31)

$$\begin{aligned} l &= 1{,}025 \sqrt[3]{\frac{Eb^3h}{p} \sqrt{\frac{2m}{m+1}\left(1 - 0{,}63\, \frac{b}{h}\right)}} \\ &= 1{,}025 \sqrt[3]{\frac{Eb^2}{\gamma} \sqrt{\frac{2m}{m+1}\left(1 - 0{,}03\, \frac{b}{h}\right)}}. \end{aligned} \tag{40}$$

Eine Frage soll hier noch kurz Erledigung finden: Wie lang muss der Stab sein, damit das Kippen eintritt, bevor eine bestimmte maximale Spannung σ auftritt? Es ist

$$\sigma = \frac{6\,Pl}{bh^2}; \text{ also } P = \frac{\sigma bh^2}{6l} = 0{,}415\, \frac{Eb^3h}{l^2}\left(1 - 0{,}315\, \frac{b}{h}\right),$$

daraus findet sich $l = 2{,}49\, \frac{Eb^2}{h\sigma}\left(1 - 0{,}315\, \frac{b}{h}\right)$. (41)

Bedeutet σ die Bruchspannung oder Fliessspannung, so wird von kleinerer Länge, als die Formel ergibt, noch vor dem Kippen der Bruch (bei sprödem Material) resp. dauernde Verbiegung (bei zähem Material) auftreten. Ist l nicht sehr viel grösser als der Grenzwert, so wird während des Auskippens auch die Zerstörung erfolgen, da durch die im gefährlichen Querschnitt hinzukommende

Torsion die Spannungen erhöht werden. Erst wenn l um ein gutes grösser genommen wird, ist es möglich, die rein elastischen Erscheinungen zu beobachten, deren Theorie hier gegeben wurde.

C. Zusammenhang der Kipperscheinungen mit der gewöhnlichen Knickung.

In diesem letzten Abschnitt des theoretischen Teiles sei es mir gestattet, noch einen Fall aufzuführen, der ein Mitteldingzwischen Kippen und Knicken darstellt und so einen Uebergang von der einen Erscheinung in die andere darbietet. Wenn die Kraft immer in der senkrechten Richtung wirkt, also etwa eine Schwerkraft ist, so muss der zu knickende Stab senkrecht, der andere aber wagrecht aufgestellt werden. Wird er nun aber schief aufgestellt, so beansprucht ihn eine Komponente der Kraft auf Knicken, die andere auf Kippen.

Die Rechnung hat hier sehr viel Aehnlichkeit mit der der vorhergehenden Abhandlung. Auf die Durchbiegung in der Richtung von P (siehe Abb. 19) soll hier nicht geachtet werden, wie überhaupt die kleinen Grössen zweiter Ordnung ($\frac{b^2}{h^2}$ u. s. w.) jetzt wieder vernachlässigt werden sollen.

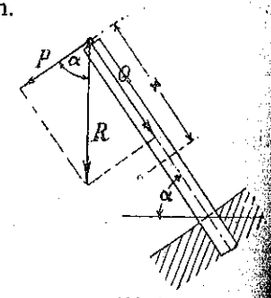


Abb. 19

Das Koordinatensystem sei analog dem früheren so gelegt, dass der Ursprung mit dem Kraftangriffspunkt zusammenfällt; die X-Achse soll parallel der ursprünglichen Stabrichtung gezogen sein, die Z-Achse senkrecht dazu in der Ebene RX, also mit Komponente P zusammenfallend, und endlich die Y-Achse senkrecht zu den beiden andern.

Nun können die Beiträge von P und Q zur seitlichen Biegung angeschrieben werden; es wird:

$$B_2 y'' = -Qy - Px\varphi. \tag{42}$$

Die Torsion wird wieder beschrieben durch Gleichung (4):

$$C\varphi' = -P(y - xy').$$

Setzt man zur Vereinfachung wieder: $\frac{Q}{B_2} = L$ und $\frac{P^2}{B_2 C} = N$, so unterscheiden sich die Gleichungen von denen des vorigen

Abschnitts nur dadurch, dass $M = 0$ und L durch $-L$ ersetzt ist. Mit Berücksichtigung dieser Dinge wird dann die Differentialgleichung dieses Problems:

$$xy''' - y'' + (L + Nx^2)(xy' - y) = 0. \tag{43}$$

Hieraus ergibt sich wieder die Rekursionsformel für die Koeffizienten zu:

$$A_n = -\frac{1}{n(n-1)(n-3)}\left((n-3)\,L\,A_{(n-2)} + (n-5)\,N\,A_{(n-4)}\right).$$

Setzt man jetzt $y_0 = 0$ (zentrischer Kraftangriff), dann wird $A_0 = 0$; infolgedessen wird nach Gleichung (42) auch $y_0'' = 2\,A_2 = 0$; als willkürliche Grössen bleiben wieder $y_0' = A_1$ und $y_0''' = 6\,A_3$. Hiemit wird nun:

$$y = y_0' x + y_0'''\left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5 L}{5!} + \frac{x^7}{7!}(L^2 - 10\,N) - \frac{x^9}{9!}(L^3 - 38\,LN) + \frac{x^{11}}{11!}(L^4 - 92\,L^2 N + 540\,N^2) - \ldots\right).$$

Berechnet man hieraus y' und φ, so ergibt der Vergleich mit Formel (42), dass zwischen φ_0, y_0' und y_0''' noch die Beziehung bestehen muss:

$$\frac{\varphi_0 C}{P} + y_0'\frac{L}{N} + \frac{y_0'''}{N} = 0. \tag{44}$$

Aendert man φ_0 und y_0' gleichzeitig so, dass nach Gleichung (44) y_0''' konstant bleibt, so wird dadurch, wie ersichtlich, die Gestalt der elastischen Linie nicht geändert, da diese nur von y_0''' abhängt. Bei näherem Zusehen zeigt sich, dass diese Veränderung von y_0' und φ_0 lediglich eine Drehung des Koordinatensystems um die feste Richtung R darstellt, wodurch sich das erwähnte Verhalten von selbst erklärt.

Für $x = l$ wird wieder $y' = 0$ und $\varphi = 0$. Setzt man $N l^2 = u^2$ und $L l^2 = u\lambda$, wobei dann

$$\lambda = \frac{L}{\sqrt{N}} = \frac{Q}{P}\sqrt{\frac{C}{B}} = \operatorname{tg}\alpha\sqrt{\frac{C}{B}}$$

ist, so hat man:

$$0 = l^2 y_0' + \frac{y_0'''}{N}\left(\frac{u^2}{2!} - \frac{u^3\lambda}{4!} + \frac{u^4}{6!}(\lambda^2 - 10) - \frac{u^5}{8!}(\lambda^3 - 38\lambda) + \frac{u^6}{10!}(\lambda^4 - 92\lambda^2 + 540) - \cdots\right)$$

$$0 = \frac{C\varphi_0}{P} + \frac{y_0'''}{N}\left(\frac{2u^2}{4!} - \frac{4u^3}{6!}\lambda + \frac{6u^4}{8!}(\lambda^2 - 10) - \cdots\right).$$

Führt man für die zwei Reihen wieder Buchstabenbezeichnung ein, so wird:

$$0 = l^2 y_0' + \frac{y_0'''}{N}\,\mathsf{F}$$

$$0 = \frac{\varphi_0 C}{P} + \frac{y_0'''}{N}\,\mathsf{G}.$$

Zieht man von der zweiten Gleichung die Gleichung (44) ab, so erhält man:

$$0 = -y_0' \frac{\lambda}{\sqrt{N}} + \frac{y_0'''}{N}(\mathsf{G} - 1).$$

Diese Gleichung ist mit der ersteren verträglich, wenn

$$(\mathsf{G} - 1)\, l^2\sqrt{N} + \lambda \mathsf{F} = 0$$

oder

$$(\mathsf{G} - 1)\, u + \lambda \mathsf{F} = 0. \qquad (45)$$

Die Auflösung dieser letzteren Gleichung liefert für die einzelnen Werte von λ die entsprechenden von u. Führt man zu diesem Zweck für die Funktionen F und G die Reihen wieder ein, so erhält man nach Ordnung der Glieder:

$$0 = 1 - \frac{u}{2!}\lambda + \frac{u^2}{4!}(\lambda^2 - 2) - \frac{u^3}{6!}(\lambda^3 - 14\lambda) + \frac{u^4}{8!}(\lambda^4 - 44\lambda^2 + 60)$$
$$- \frac{u^5}{10!}(\lambda^5 - 100\lambda^3 + 844\lambda) + \frac{u^6}{12!}(\lambda^6 - 190\lambda^4 + 4704\lambda^2 - 5400) - \cdots \qquad (46)$$

$$\left(\text{berechnet bis } \frac{u^{11}}{22!}(\cdots)\right)$$

Setzt man hierin $\lambda = 0$, was der wagrechten Lage des Stabes entspricht, so geht die Reihe über in die Reihe D des ersten Abschnitts, es ist also $u = 4{,}013$; setzt man $\lambda = \infty$, was der aufrechten Stellung des Stabes entspricht, so wird $u = 0$, aber $u\lambda = Ll^2$ bleibt endlich. Wie ersichtlich geht dann die Reihe in eine Cosinusreihe über, und zwar wird $\cos\sqrt{u\lambda} = 0$; es ist daher $\sqrt{u\lambda} = \frac{\pi}{2}$, oder $\frac{Ql^2}{B_2} = \frac{\pi^2}{4}$, also genau die Euler'sche Formel.

Ich habe für einige andere Werte von λu gerechnet; sie folgen in der Tabelle:

$\lambda =$	-1*)	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1$	$+2$	$+\infty$
$u =$	6,57	5,39	4,01	2,77	1,95	1,147	0,00
$u\lambda =$	$-6{,}57$	$-2{,}69$	0,00	$+1{,}39$	1,95	2,295	2,467
$\beta =$	-45^0	$-26^0 34'$	0^0	$+26^0 34'$	45^0	$63^0 26'$	90^0

*) Für $\lambda = -2$ versuchte ich die Rechnung auch noch zu machen, musste sie aber wegen der schlechten Konvergenz der Reihe wieder aufgeben.

Führt man einen Hilfswinkel β ein, der bestimmt ist durch $\operatorname{tg}\beta = \lambda = \operatorname{tg}\alpha\sqrt{\frac{C}{B}}$ (in der letzten Zeile der Tabelle sind die Werte von β angegeben), so ergeben sich, wenn die Werte von u und $u\lambda$ als Ordinaten zu denen von β als Abszissen aufgetragen werden, mit Hilfe der gerechneten Punkte zwei Kurven, aus deren sorgfältiger Aufzeichnung folgende Tabelle gewonnen wurde.

β	λ	u	$u\lambda$
-50^0	$-1{,}192$	6,97	$-8{,}31$
-40^0	$-0{,}839$	6,22	$-5{,}22$
-30^0	$-0{,}577$	5,58	$-3{,}22$
-20^0	$-0{,}364$	5,02	$-1{,}83$
-10^0	$-0{,}176$	4,50	$-0{,}79$
0^0	0,000	4,01	0,00
$+10^0$	$+0{,}176$	3,53	$+0{,}62$
$+20^0$	0,364	3,07	1,12
30^0	0,577	2,62	1,51
40^0	0,839	2,17	1,82
50^0	1,192	1,73	2,06
60^0	1,732	1,30	2,24
70^0	2,747	0,86	2,37
80^0	5,145	0,43	2,44
90^0	∞	0,00	2,47

Nach den früheren Beziehungen wird nun

$P = \frac{u}{l^2}\sqrt{BC}$; $Q = \frac{u\lambda}{l^2}B$; hieraus ergibt sich $R = \frac{uB}{l^2}\sqrt{\frac{C}{B} + \lambda^2}$.

Zur Durchrechnung eines gegebenen Falles empfiehlt es sich, zuerst λ und β zu ermitteln, dann aus obiger Tabelle durch Interpolation u resp. $u\lambda$ aufzusuchen (für $\beta < +60^0$ wird die Interpolation von u genauer, über 60^0 die von $u\lambda$), woraus sich das andere einfach ergibt.

Wenn man das Verhältnis $\sqrt{\frac{C}{B}}$ kennt, so kann man die zu verschiedenen Winkeln α gehörigen Werte von P und Q (oder auch die von u und $u\lambda\sqrt{\frac{B}{C}}$, was nur eine Aenderung des Massstabes bedeutet) als rechtwinklige Koordinaten zu einander auftragen.

Die hiedurch entstehende Kurve ist in Abb. 20 dargestellt; wie man sieht, ist sie zugleich ein Polardiagramm für $R = \sqrt{P^2 + Q^2}$. Man erkennt, dass R bei negativem α rasch zunimmt; wird $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, so geht die Gleichung (46) über in $\sqrt{u\lambda} = 0$; diese Gleichung hat überhaupt keine reelle Wurzel, was

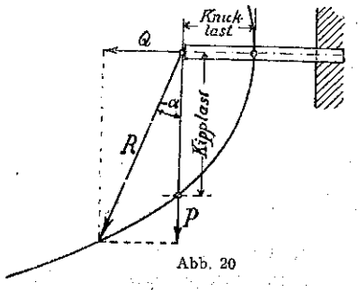


Abb. 20

auch der Erfahrungsthatsache entspricht, dass ein auf reinen Zug beanspruchter Stab nie etwas einer Ausknickung Aehnliches erfährt. Eine nähere Untersuchung der Reihe (46) lässt übrigens als wahrscheinlich voraussehen, dass noch bei einem Winkel, der um eine Spur kleiner ist als ein rechter, für u eine reelle, aber unendlich grosse Wurzel vorhanden ist.

Der verhältnismässige Anteil an der Gesamtformänderung, welcher in den verschiedenen Fällen auf die Verdrehung bezw. die Biegung trifft, lässt sich gut beurteilen durch einen Quotienten $\frac{l}{r}$, wobei r die Entfernung des Kraftangriffspunktes von demjenigen Punkte bedeutet, nach dem hin die verschiedenen Stellungen der grossen Hauptachse des Endquerschnittes während des Kippens konvergieren.

Da man für den Ausschlag f des Stabendes setzen kann: $f = y_l = r\varphi_0$, so wird $r = \frac{y_l}{\varphi_0}$, und daher $\frac{l}{r} = \frac{l\varphi_0}{y_l}$. Im Falle $\lambda = 0$ wird diese Grösse nach Gleichung (17) S. 32: $\frac{l}{r} = 1{,}43\sqrt{\frac{B}{C}}$. Für $\lambda = +1$ und $\lambda = -1$ habe ich das Verhältnis besonders gerechnet und erhielt $0{,}565\sqrt{\frac{B}{C}}$ und $4{,}13\sqrt{\frac{B}{C}}$. Im Fall der reinen Knickung ($\lambda = +\infty$) ist eine Verdrehung nicht vorhanden, also $\frac{l}{r} = 0$.

Die angegebenen Zahlen zeigen deutlich, wie bei abnehmendem λ, d. h. bei wachsendem Winkel zwischen Kraft- und Stabrichtung die Verdrehung gegenüber der Biegung immer mehr an Bedeutung gewinnt, um schliesslich, wenn der Winkel sich einem gestreckten nähert, überhaupt der ausschlaggebende Teil der Formänderung zu werden.

III. Abschnitt.

Versuche.

Die Versuche wurden unternommen einesteils zur Kontrolle der Rechnungen, andrerseits auch, um verschiedene Beziehungen klarzustellen, über die die Rechnung keinen Aufschluss gibt. Hieher gehört vor allem das Verhalten des Stabes bei endlichen Ausbiegungen.

In erster Linie handelt es sich also um eine möglichst einwandfreie und genaue Bestimmung der Kipplast. Daneben müssen auch die Grössen B_1, B_2 und C experimentell ermittelt werden, um den Vergleich der Formeln und Beobachtungen ausführen zu können.

Da die Stabilität des belasteten Stabes am besten aus seinen Schwingungen beurteilt werden kann, ist es notwendig, in der ganzen Anordnung Reibungen möglichst zu vermeiden. Aus diesem Grunde beschränkte ich mich bei den Versuchen auf diejenige Einspannungsart, welche von allen die geringsten Reibungen voraussehen liess, nämlich die, bei der ein Stabende eingespannt und das andere freie durch Gewichte belastet ist. Aus diesem Grunde auch dieser Belastungsfall in der Theorie am ausführlichsten behandelt worden.

Der Einspannvorrichtung ist besonderes Augenmerk zuzuwenden. Sie muss gegenüber den zur Anwendung kommenden Kräften sehr stark gebaut sein, damit sie nicht die Formänderungen mitmacht und so das Resultat fälscht. Sie muss aber auch den Stab mit grosser Kraft einklemmen, damit, wie in der Rechnung vorausgesetzt, das Stabelement an der Grenze der Einspannung in Richtung unverändert beibehält.

Dieser ideale Zustand ist freilich nie vollständig zu erreichen, da bei den schärfsten Pressungen der Einspannbacken immer kleine Bewegungen vorkommen. Da diese Bewegungen mit

Gleiten an den Einspannflächen verbunden sind, treten dabei Reibungen auf, die trotz ihrer Kleinheit in der Nähe der kritischen Last sich sehr bemerkbar machen. Diese Reibungen, die mir bei den Vorversuchen manchen Streich gespielt haben, bis ich sie in ihrem Wesen erkannte und zu berücksichtigen lernte, rühren in der Hauptsache davon her, dass die Verkrümmung der Querschnitte, die bei der Torsion auftritt, sich auch noch innerhalb der Einspannvorrichtung fortpflanzt und erst weiter drinnen, durch die Wirkungen der einspannenden Flächen erlischt. Die Folge davon ist, dass nach Vorausgang einer starken Torsion von der Verdrehung immer etwas zurückbleibt, wodurch dann der erste freie Stabquerschnitt immer ein wenig nach der Seite hin schief gestellt ist, nach der die letzte Verdrehung erfolgte. Die Wirkung dieser Schiefstellung wurde in einem früheren Abschnitte bereits beschrieben (S. 32). Rechnungsmässig lässt sich der Einfluss der Reibungen bis jetzt nicht nachweisen, da eine strenge Theorie dieser Einspannwirkungen meines Wissens nicht vorliegt.*) Es wäre eine sehr dankenswerte Aufgabe, wenn dieses Problem einer Lösung zugeführt würde. Im späteren Verlauf der Versuche habe ich gerade den Einfluss der Einspannflächen durch einen besonderen Versuch ersichtlich gemacht. — So weit übrigens die rein elastische Wirkung einer zu schwachen Einspannung in Frage kommt, so kann dieser Einfluss immer dadurch Berücksichtigung finden, dass man den Wert der freien Stablänge in den Formeln um ein bestimmtes (für die Einspannung charakteristisches) Stück vergrössert.

Die Wahl des Versuchsmaterials erheischt auch etwas Vorsicht. Aus den schon erwähnten Gründen ist ein Material unbrauchbar für genaue Versuche, das merkliche innere Reibung und elastische Nachwirkungen besitzt. Deshalb verzichtete bald auf einen Versuch mit einem Holzstabe (Reissschiene) und beschränkte mich mit Stäbe von Stahl. Versuche mit zwei Stäben aus Werkzeugstahl mit rechtwinkligem Querschnitt 10×1 mm und 15×2 mm gab ich auf wegen der dabei auftretenden grossen Hauptbiegung (die Theorie der Berücksichtigung derselben besass ich damals noch nicht). So kam es, dass ich mich bei den spätern Versuchen nur eines Materials bediente, nämlich eines gewalzten Flacheisens (vermutlich deutscher Bessemerstahl) von 40×3 mm rechtwinkligem

*) Was v. Bach in seinem Buche „Elasticität und Festigkeit" (S. 1898, Berlin, Springer) darüber bringt, ist nicht streng und erlaubt eine ungefähre Abschätzung der numerischen Verhältnisse.

Querschnitt. So sollten die Masse wenigstens nach den Angaben des Walzwerks sein. In Wirklichkeit wich die Querschnittsform so viel von der Rechtecksgestalt ab, indem alle Seitenflächen etwas gewölbt waren, dass die Anwendung der Formel (39) kein genügend genaues Resultat mehr ergibt. Auf die Güte der Versuche hatte dies übrigens keinen Einfluss, da ja die Grössen B_1, B_2 und C experimentell bestimmt wurden.

Der verwendete Stab hatte zunächst eine Länge von nicht ganz vier Metern. Er wurde vor allem möglichst gerade gerichtet. Der erste Versuch galt der Bestimmung derjenigen freien Länge, bei der der Stab unter seinem Eigengewicht kippte. Er wurde zu diesem Zweck in einen starken Schraubstock eingespannt, und einfach durch Fühlen mit der Hand die Stabilität oder Instabilität beurteilt. Die freie Länge wurde dann so lange geändert, bis der erwünschte Grenzzustand erreicht war. Zwei derartige Versuche ergaben die Länge $l = 3{,}265$ m und 3,270 m.

Hierauf wurde der Stab in zwei etwas ungleiche Teile, etwa 1,8 und 2,1 m zerschnitten. Mit dem kleineren Stück wurden Vorversuche mit Belastung des freien Endes durch Gewichte vorgenommen. Bei diesen Versuchen wurden die seitlichen Ausschläge des Stabendes mittelst eines Stangenzirkels von einem Fixpunkt aus gemessen. Nach den Erfahrungen, welche ich bei diesen Versuchen gewann, wurde dann die endgiltige Versuchseinrichtung zusammengestellt, welche ich jetzt beschreiben werde.

Die Einspannung wurde vorgenommen mittelst eines Zubehörstückes der Werder'schen 100-Tonnen-Maschine, welches seinem eigentlichen Zweck nach als Einspannkopf für Zugversuche mit Holzstäben dient. Vier $^3/_4$" Schrauben gestatten den Stab scharf einzuspannen. Die ganze Vorrichtung ist in einem schweren Bock um eine horizontale Achse drehbar gelagert und kann in jeder Lage festgestellt werden.

Dem freien Ende habe ich die in Abb. 21 erkennbare Gestalt gegeben. Der Bügel b, an dem die Wagschale hängt, greift an einer Schneide an, so dass für Kraftangriff in der Mittelebene des Stabes gesorgt ist. Die jeweilige

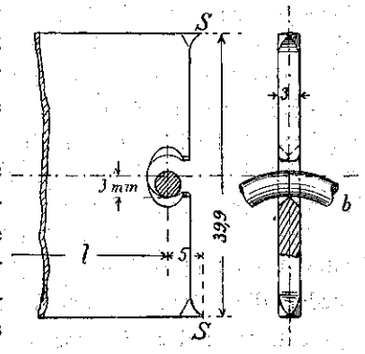


Abb. 21.

Stellung des Stabendes wurde dadurch notiert, dass ein Blatt Millimeterpapier gegen die Spitzen S gedrückt wurde; die auf diese Weise erhaltenen Reihen von Stichmarken geben ein übersichtliches Bild von dem ganzen Verlauf des Versuches; zugleich ergibt die Lage der zusammengehörigen Marken der oberen und der unteren Spitze, die 39,9 mm Entfernung besitzen, einen Anhaltspunkt über den Winkel φ_0. Das Blatt Millimeterpapier war mit Reissstiften auf einem Brett (Abb. 22) befestigt, das, durch drei flächenläufige Führungen 1, 2, 3 in der Richtung erhalten, im übrigen von Hand bewegt wurde. Da bei zunehmender Verkrümmung des Stabes die Verbindungslinien der beiden Spitzen merklich schief zu stehen kommt, muss das Brett um eine horizontale Achse geneigt werden können. Zu diesem Zweck sind die stützenden Vorsprünge aa als Schneiden ausgebildet und der grösseren Dauerhaftigkeit halber mit Blech beschlagen. Die Schneiden sind möglichst in die Papierebene gerückt, damit beim Neigen um die Achse aa die Höhenlage des Millimeterpapiers nicht verändert wird. Zusammenfassend kann man sagen, dass die Vorrichtung den Zweck erfüllt, die y- und z-Koordinaten der einzelnen Punkte des Papierblatts — unter Vernachlässigung der kleinen Grössen zweiter Ordnung — konstant zu erhalten, während dagegen die x-Koordinaten willkürlich von Hand geändert werden konnten.

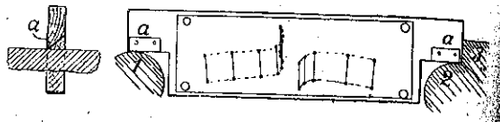


Abb. 22

Mit dieser Einrichtung wurden nun die Versuche in der Weise unternommen, dass man, nachdem man sich über die ungefähre Grösse der Kipplast Aufschluss verschafft hatte, zunächst mittelst der horizontalen Achse der Einspannvorrichtung den Winkel φ_l so lange veränderte, bis der Ausschlag, der etwa einer Vermehrung der Belastung von 90 auf 95% der Kipplast entsprach, auf ein möglichst geringes Mass reduziert war. Dann begann man vom unbelasteten Zustand aus unter allmählich steigender Last, je nach den Umständen in Stufen von 1 kg oder $^1/_2$ kg, unter Beruhigung der Schwingungen Einstichmarken zu machen. In der Nähe der Kipplast, wo die Wege des Stabendes stark anwachsen, wurden die Intervalle nach Bedürfnis kleiner genommen.

Die über der Kipplast auftretenden labilen Gleichgewichtslagen wurden auch beobachtet. Mit einiger Uebung gelingt es, nämlich

mit grosser Sicherheit den Ort ausfindig zu machen, an dem das Stabende, zwischen den Fingerspitzen geführt, weder nach links noch nach rechts drückt. Ist dieser Zustand erreicht, dann wird schnell eine Einstichmarke gemacht. Wie sicher dieses Verfahren ist, das zeigt sich in dem Umstande, dass die für verschiedene Lasten erhaltenen Einstiche immer eine Reihe ergeben, deren Stetigkeit nichts zu wünschen übrig lässt. Schwierig sind nur die Beobachtungen in allernächster Nähe der Kipplast. Hier ist der bereits beschriebene Einfluss der Reibungen so gross, dass man selbst auf einige Centimeter oft nicht angeben kann, wo die Gleichgewichtslage sich befindet. Zum Glück läuft dann auch die Linie des Diagramms (siehe unten) annähernd horizontal, so dass aus der genannten Unsicherheit weiterer Nachteil nicht erwächst. Um aber wenigstens aus den anderen Beobachtungswerten die Einflüsse der Reibung möglichst fern zu halten, empfiehlt es sich, und wurde auch bei den späteren Versuchen durchgängig beachtet, alle Gleichgewichtslagen, die stabilen wie die labilen, bei denen die Ausbiegungen gering sind, zuerst vorzunehmen und erst zum Schluss die weit ausgelenkten. Wenn übrigens der Stab, bevor er in eine Gleichgewichtslage gelangte, eine starke Ausbiegung erfahren hatte, so ist dies in den Versuchsprotokollen durch einen dem Einstich beigesetzten kurzen Pfeil $\xrightarrow{\bullet}$ angedeutet, und zwar zeigt der Pfeil die Richtung an, in der fortschreitend man von der ausgebogenen Lage in die Gleichgewichtslage gelangt (bei der obenstehenden Pfeilrichtung war also eine Ausbiegung nach links vorausgegangen).

Bevor ich nun auf die einzelnen Versuchsergebnisse eingehe, ist einiges über das Gleichgewicht bei endlichen Ausbiegungen zu sagen. (Diese Betrachtungen, die für alle Arten von Knickerscheinungen Giltigkeit haben, gehören einem andern Teil meiner Arbeit über Stäbe, deren eine Querschnittsdimension klein gegenüber der andern ist, an. Ursprünglich auch für diese Veröffentlichung bestimmt, musste er aus verschiedenen Gründen zurückstehen. Jetzt soll nur das hier Notwendige ohne Beweis Erwähnung finden.) Stellt man sämtliche Gleichgewichtslagen mit den zugehörigen Kräften in einem Diagramm zusammen, indem man die Kräfte als Ordinaten zu irgend einer die Gleichgewichtslage bestimmenden Grösse (Durchbiegung f, Winkel φ_0 u. s. w.) als Abszisse aufträgt, so erhält man im idealen Falle je nach Umständen das rechte oder linke Diagramm der Abb. 23. Die Euler'sche Formel oder

die Formel (16) liefern von diesem Diagramm nur das mittlere Stück: die senkrechte Linie und die horizontale Tangente an den andern Kurvenast. Wenn wie gewöhnlich bei grösseren Ausbiegungen das innere Moment schneller wächst, wie das äussere, so tritt der links gezeichnete Fall ein. Der andere ist sehr selten; er findet sich, wie ich nachweisen konnte, bei der Knickung von dünnwandigen Rohren, Winkeleisen u. a. m. Die dick ausgezogenen Linien bedeuten stabile, die dünnen labile Gleichgewichtslagen.

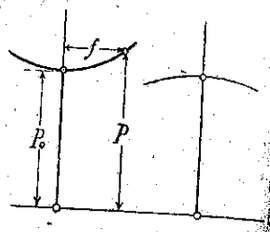


Abb. 23

Im praktischen Falle treten noch die hyperbolischen Ausweisungen hinzu, so dass die Diagramme die in Abbildung 24 ersichtliche Gestalt annehmen. Im ersten Fall, der auch hier zutrifft, ergibt sich eine stetige Reihenfolge von stabilen Gleichgewichtslagen, wobei in der Höhe der kritischen Last die Stabilität ein Minimum hat. Daneben existiert über der kritischen Last ein zweiter Zweig von stabilen Gleichgewichtslagen, und damit zusammenhängend der Zweig der labilen Gleichgewichtslagen. Die Versuchsergebnisse zeigen genau dieses Bild, nur dass wegen der ursprünglichen Krümmungen und Verdrehungen des Stabes an Stelle der senkrechten Linie auch eine — wenn auch wenig abweichende — Kurve tritt. Ergänzt man das Diagramm (genügend genau nach dem Augenmass) durch die punktierten Linien, so ergibt deren Schnittpunkt die kritische Last. — Zu dem gezeichneten Fall der Abb. 25 möchte ich nur erwähnen, dass man bei Knickversuchen mit den genannten Stäben noch vor der Knicklast einen Punkt erreicht, bei dem unfehlbar der Zusammenbruch durch Quetschen des Rohrs, resp. Oeffnen der Schenkel des Winkeleisens eintritt.

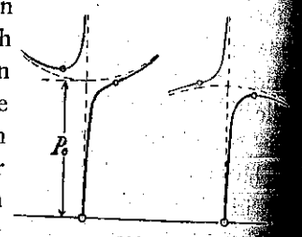


Abb. 24

Doch nun zu den Versuchen selbst! Der kürzere Stab, mit dem die Vorversuche gemacht wurden, war mehrmals verbogen worden. Beim Geraderichten war er dann mit dem Hammer unsanft behandelt worden, so dass ich nicht sicher war, ob sich nicht dadurch seine Elastizitätsverhältnisse merklich geändert haben. Daher nützte ich für die Hauptversuche nur das längere Stück, das in gutem Zustand war. Als Versuchslängen fanden Anwendung

l = 1,2 m, 1,4 m, 1,6 m und 1,8 m. Unter 1,2 m war man, wie die Vorversuche gezeigt haben, bereits der Proportionalitätsgrenze des Materials zu nahe.

Auf Tafel I sind zwei Versuchsprotokolle in möglichst getreuer Nachbildung zur Darstellung gebracht. Tafel II zeigt von einer Anzahl von Versuchen die Diagramme, wobei die untere (innere) Umfassungslinie als Abszissenachse dient, während die Ordinatenachsen durch die strichpunktierten Linien dargestellt werden. Für die freie Länge von 1,2 m wurden zwei Versuche speziell zur Sichtbarmachung des Einflusses der Reibungen unternommen. (Tafel II, Nr. 3 und 5). Der Stab wurde bei jeder Last vor dem Einstechen etwa 20 cm zur Seite gebogen, dann unter möglichster Vermeidung von Schwingungen zurückgeführt und die so erhaltene Gleichgewichtslage auf dem Protokoll vermerkt. Dasselbe Verfahren wurde sodann nach der andern Seite wiederholt. Die auf diese Weise erhaltenen Ergebnisse wurden in einem Diagramm zusammengetragen; der zwischen den Kurven eingeschlossene Raum bezeichnet das Gebiet der durch die Reibungen möglichen Gleichgewichtslagen. Bei dem einen Versuch fallen die in Abb. 24 punktierten Kurven des idealen Falles in das besagte Gebiet, bei dem andern dagegen, wo φ_l absichtlich etwas abweichend gewählt wurde, ausserhalb desselben.

Da mir zur Zeit der Versuche die Rechnungen über die Berücksichtigung der Hauptbiegung noch nicht vorlagen, konnte ich die Seite 57 angegebene Regel über die Höheneinstellung des Endes noch nicht anwenden. Als sich jedoch im Laufe der Versuche eine solche Korrektion als notwendig ergab, verzeichnete ich auf den Protokollen immer die Höhenlage des eingespannten Endes durch ein den Querschnitt darstellendes Rechteck. Auf den früheren Blättern wurde diese Höhenlage, die seinerzeit nicht gemessen, aber nicht notiert worden war, nach der Erfahrung nachgetragen. Zwei Doppelversuche sind speziell zu diesem Zwecke unternommen, den Einfluss der Schiefstellung zu studieren (der eine derselben ist durch die Diagramme Nr. 7 und 8 auf Tafel II zur Darstellung gebracht); auf 59,5 beziehungsweise 60 Höhendifferenz des Stabendes in beiden Fällen ergab sich bei der Länge von 1,2 m in der Kipplast 0,35 kg Unterschied. Berechnet man gemäss dieser Angabe die verschiedenen Kipplasten vom Wert der Schiefstellung α, der unter Berücksichtigung der Durchbiegung durch das Eigengewicht als Mittelwert für die ver-

schiedenen Versuche zu 0,006 erhalten wird; so ergeben sich hieraus für die einzelnen freien Längen folgende Mittelwerte:

$$l = 1{,}2 \quad 1{,}4 \quad 1{,}6 \quad 1{,}8 \text{ m}$$
$$P = 6{,}81 \quad 4{,}76 \quad 3{,}39 \quad 2{,}42 \text{ kg.}$$

Dazu ist jedesmal noch das Gewicht der Wagschale mit Zubehör = 0,41 kg zu addieren.

Für die Stellung des Stabes unter 45° aufwärts wurden ebenfalls zwei Versuche unternommen. Bei einer freien Länge von 1,40 m ergab sich die Kipplast beidemale zu 2,47 kg, wozu noch das Gewicht der Wagschale zu addieren ist.

Die Nebenversuche bestanden in einem Torsionsversuch zur Bestimmung der Drehungssteifigkeit C, und in einem Biegeversuch zur Ermittlung der Biegungssteifigkeit B_2. Zum Torsionsversuch wurde das eine Ende des Stabes in die bisher benutzte Einspannvorrichtung eingeklemmt, das andere in der Querschnittsmitte durch eine Schneide aufgelagert. Dicht an diesem Ende war der Hebel befestigt, auf dessen Ende die Last einwirkte. Die Schnur, an der die Wagschale hing, war über ein am Hebel angebrachtes Kreissegment gelegt, um den Hebelarm a des Torsionsmoments konstant zu erhalten. Mit Berücksichtigung der Schnurdicke war $a = 389{,}5$ mm. Der Teilkreis, an welchem die Torsionswinkel abgelesen wurden, war dermassen eingeteilt, dass ein Teil in 321 mm Radius 2,02 mm mass, also im Bogenmass = 0,0062. Die Verdrehung wurde kenntlich gemacht durch einen am Stab befestigten Zeiger. Die Messlänge l (die Entfernung der Zeigerbefestigung vom eingespannten Ende) war gerade = 1,00 m gewählt. Mit dieser Einrichtung wurden zwei Versuche unternommen, von deren einem die Zahlen nebenstehend aufgeführt sind.

Last	Ables.	Diff.
0,0	162,5	18,8
1,0	143,7	18,8
2,0	124,9	18,8
3,0	106,1	18,8
4,0	87,2	18,9
3,0	106,1	18,9
2,0	124,9	18,8
1,0	143,7	18,8
0,0	162,5	

Der Verdrehungswinkel ist in Uebereinstimmung mit dem andern Versuch im Mittel für 1 kg 18,82 Teile = 0,1185 im Bogenmass. Nun ist nach Gl. (2)

$$C\,\Delta\varphi = P \cdot a \cdot l, \text{ also}$$

$$C = \frac{1{,}0 \cdot 38{,}95 \cdot 100}{0{,}1185} = \mathbf{32900\ kg\ cm^2}$$

Die Biegeversuche wurden in einer etwas ungewöhnlichen, hier aber zweckmässigen Weise

geführt. Wie aus der Abb. 25 ersichtlich, wurde der Stab in zwei ziemlich nahe beisammen liegenden Punkten gestützt und in der Mitte belastet. Die beiden unbelasteten Enden bewegen sich dabei wie grosse Zeiger;

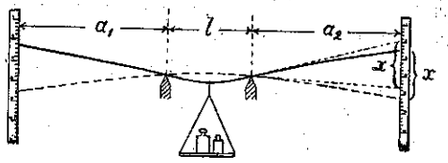


Abb. 25

durch die Ablesung an den zwei Massstäben erhält man daher die Durchbiegung in starker Vergrösserung. Zu dieser Versuchseinrichtung entschloss ich mich, weil einerseits bei der grossen Breite des Stabes kleine Durchbiegungen schwer zu messen sind, andrerseits, wenn man grosse Spannweiten zur Vergrösserung der Durchbiegung anwenden wollte, wegen der geringen Dicke das Eigengewicht sehr störend auftreten würde. Bei dieser Anordnung dagegen wirkt das Eigengewicht gerade günstig ein, indem es eine entgegengesetzte Biegung hervorruft, und so grössere Lasten aufzulegen gestattet. Durch das Mittelnehmen aus den zwei Ablesungen werden sowohl etwaige Ungleichheiten der Arme a und a_2, als auch eine kleine Verschiebung des Lastangriffs aus der Mitte das Resultat unschädlich gemacht.

Die Neigung φ, die abgesehen von dem Eigengewicht, dessen Wirkung unter Vernachlässigung der zweiten Ordnung konstant zu setzen ist, in den Auflagerpunkten auftritt, ist einerseits nach der bekannten Formel $\varphi = \frac{Pl^2}{16B_2}$, andrerseits aus der Figur $\varphi = \frac{x}{a}$; hieraus ergibt sich $B_2 = \frac{Pl^2 a}{16x}$; l war = 46,0 cm, a_1 = 81,7 cm, a_2 = 81,9 cm. Hier wurden ebenfalls zwei Versuche vorgenommen, von denen ich einen hier in abgekürzter Form folgen lasse.

Last	Abl. links	Diff.	Abl. rechts	Diff.	Mittel
0 kg	703mm		239		
		19,0		20,0	19,5
4	722		219		
		19,5		19,5	19,5
8	741,5		199,5		
		19,5		19,5	19,5
12	761		180		
		19,5		19,5	19,5
8	741,5		199,5		
		19,5		19,5	19,5
4	722		219		
		19,0		19,5	19,25
0	703		238,5		

Die Masse wurden immer auf halbe Millimeter abgerundet, weitere Teile schon zu unsicher waren.

Der Versuch gibt für 4,0 kg einen Mittelwert von 19,46 mm, der andere 19,50 mm, das Gesamtmittel ergibt also: 19,48 mm, hiemit erhält man für B_2:

$$B_2 = \frac{4{,}0 \cdot 46{,}0^2 \cdot 81{,}8}{16 \cdot 1{,}948} = \mathbf{22200\ kg\ cm^2}$$

B_1, dessen Kenntnis für die genaue Formel (38) nötig ist, ergibt sich genau genug aus den Einstichversuchen: bei $l = 1{,}80$ m ist die Durchbiegung auf 1 kg sehr genau 6,0 mm. Nach der bekannten Formel $f = \frac{Pl^3}{3B_1}$ ergibt sich (alles in kg und cm)

$$B_1 = \frac{1{,}0 \cdot 180^3}{3 \cdot 0{,}60} = \mathbf{3240000\ kg\ cm^2}.$$

Um das Gewicht pro laufendem cm, p, zu bestimmen, wurde der Stab gewogen. 208,8 cm hatten ein Gewicht von 2,071 kg, also war $p = 0{,}00992$ kg cm^{-1}.

Wie aus Abb. 21 ersichtlich, greift die Kraft etwa 3 mm unter der Stabachse an. Dieser Einfluss wurde vernachlässigt, indem angenommen wurde, dass er gerade den Einfluss der ungenügenden Einspannung kompensierte.

Der mittlere Wert der Neigung α wurde schon zu 0,006 ermittelt.

Mit diesen Werten der betreffenden Grössen wurde der Klammerausdruck der Gleichung (38) ausgerechnet. Er ergab den Wert 1,006.

Nun wird $$P_0 = 1{,}006 \cdot \frac{4{,}013}{l^2} \sqrt{B_2 C} = \frac{109100}{l^2}.$$

Die beobachtete Kipplast (Gewicht + Schale) ist dann

$$P = P_0 - 0{,}287\ G - 0{,}08\ \frac{G^2}{P_0}$$

In der folgenden Tabelle sind für die verschiedenen Längen die Werte zusammengestellt.

l	P_0	$G = pl$	$0{,}287G + 0{,}008\frac{G^2}{P_0}$	P	beobachtet
1,20 m	7,57 kg	1,19 kg	0,343 kg	7,23 kg	7,22 kg
1,40	5,56	1,39	0,401	5,16	5,17
1,60	4,26	1,59	0,460	3,80	3,80
1,80	3,37	1,78	0,520	2,85	2,83

Für den unter 45° aufgestellten Stab wird:

$$\lambda = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\frac{C}{B}} = 1{,}00 \sqrt{\frac{C}{B}} = 1{,}217; \text{ hieraus } \beta = 50^0\ 36'.$$

Aus der Tabelle ergibt sich $u = 1{,}70$, $u\lambda = 2{,}07$, mit $l = 140$ cm wird $R = \frac{uB^2}{l^2}\sqrt{\frac{C}{B} + \lambda^2} = \frac{u\lambda B}{l^2}\sqrt{2} = 3{,}32$ kg.

Nun ist das Eigengewicht zu berücksichtigen. Eine Formel hiefür habe ich nicht abgeleitet. Dagegen rechnete ich für die gewöhnliche Knickung (bei freiem belasteten Ende) ganz ähnlich wie im Abschnitt II A die Einwirkung des Eigengewichts und erhielt die Formel $P = P_0 - 0{,}297G$; ferner bekam ich für das Verhältnis der gleichmässig verteilten Knicklast zu der am Ende konzentrierten die Zahl 3,17 (gegen 3,20 beim Kippen, siehe S. 51.) Ich glaube daher keinen nennenswerten Fehler zu begehen, wenn ich in diesem zwischenliegenden Falle einen Wert annehme, der zwischen dem der ebengenannten Formel und der Formel (32) liegt. Dann wird: $P = 3{,}32 - 0{,}41 = \mathbf{2{,}91}$ kg. Die Beobachtung lieferte 2,88 kg.

Endlich ist noch nachzurechnen der Kippversuch mit Belastung durch das Eigengewicht. Nach Formel (31) ist

$$l = 2{,}345 \sqrt[6]{\frac{B_2 C}{p^2}} = 327{,}5 \text{ cm}.$$

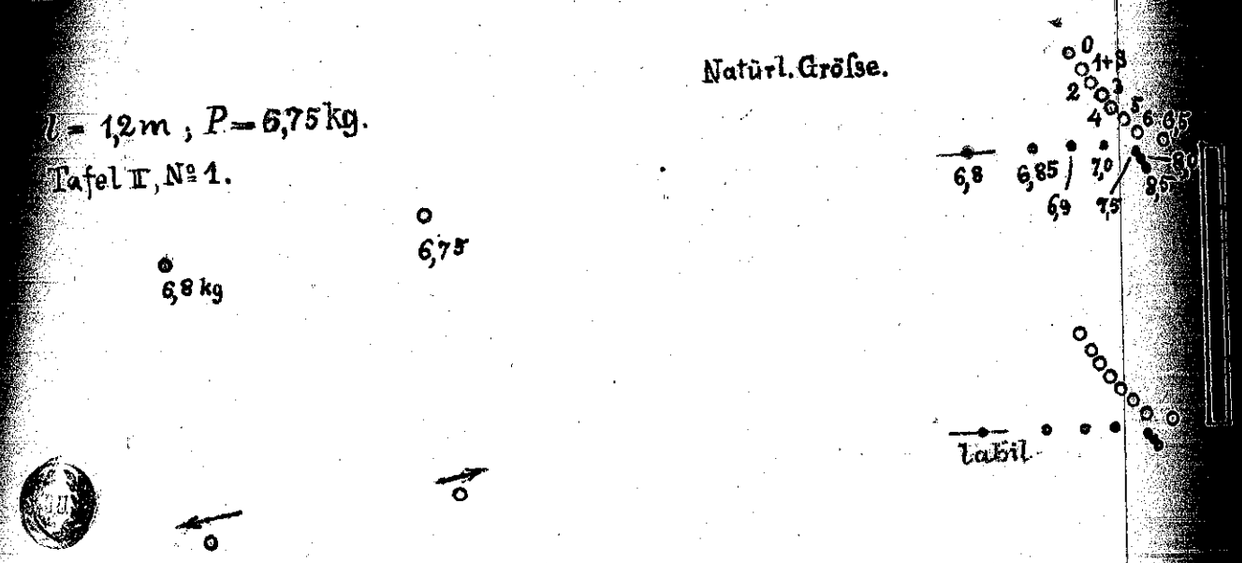
Die Versuche hatten 326,5 und 327 cm ergeben.

Die auf die Nebenversuche aufgebauten Rechnungen liefern also durchweg Resultate, die mit denen der Kippversuche in sehr guter Uebereinstimmung sind. Nur bei dem schräg gestellten Stab ergab sich etwas über 1% Differenz. Dieser Versuch ist aber trotzdem um dessentwillen weniger genau, weil hier eine Messung der Ausschläge nicht ausgeführt werden konnte. Jedenfalls aber darf gesagt werden, dass durch diese Versuche die Theorie vollauf Bestätigung gefunden hat.

Natürl. Grösse.

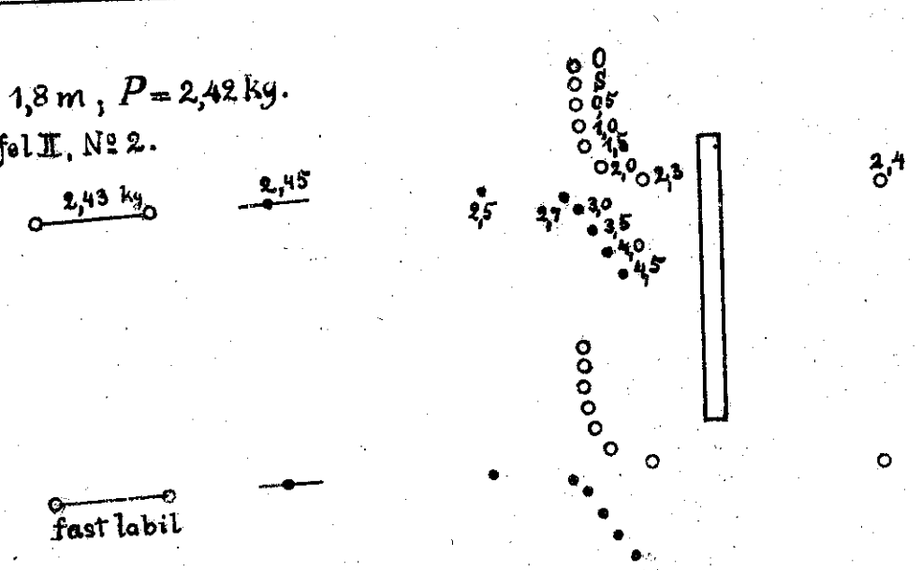
$l = 1{,}2\,m$; $P = 6{,}75\,kg$.

Tafel II, № 1.

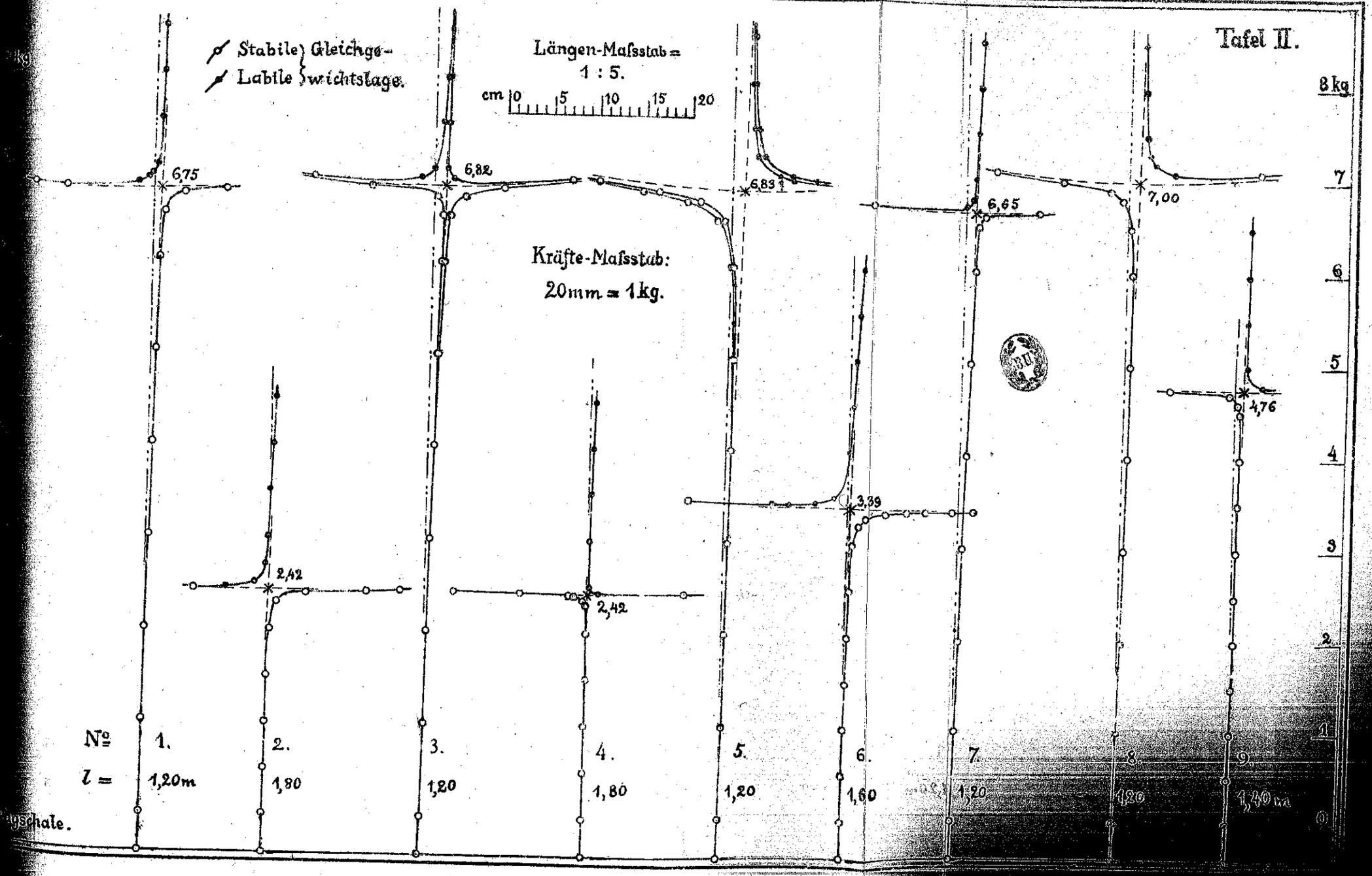


$l = 1{,}8\,m$; $P = 2{,}42\,kg$.

Tafel II, № 2.



Tafel I.


Tafel II.
Stabile } Gleichge-
Labile } wichtslage.
Längen-Maſsstab =
1 : 5.
cm 0 5 10 15 20
Kräfte-Maſsstab:
20mm = 1kg.
8 kg
7
6
5
4
3
2
1
0
6,75
6,82
6,83
6,65
7,00
4,76
3,39
2,42
2,42
№ 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.
l = 1,20m 1,80 1,20 1,80 1,20 1,60 1,20 1,20 1,40m

gschale.